Sorozatok

Fogalom

A **sorozatok** a függvények egy különleges csoportját képezik. Ha egy függvény értelmezési tartománya éppen a pozitív egész számok halmaza, akkor sorozatról beszélünk. Ha az értékkészlete a valós számok valamilyen részhalmaza, akkor **számsorozatról** van szó.
Egyszerűbben: akkor van a birtokomban egy sorozat, ha meg tudom mondani ki az első tagja, ki a második tagja, ki a harmadik tagja, és így tovább, minden pozitív egészhez tarozik valaki.
Vigyázat! Az előbb számsorozatot írtunk és **nem számtani** sorozatot! A számtani sorozat egy speciális számsorozat.
Matematika órán úgyis mindig számokkal foglalkozunk, így innentől kezdve egyszerűen csak sorozatról fogunk beszélni és számsorozatot fogunk alatta érteni.

Jelölés

Bár a sorozatok függvények, hogy mégis elkülönüljenek a többi mezei függvénytől, nem a szokásos f, g, h betűkkel szoktuk jelölni őket, hanem inkább az ábécé elejéről választunk nekik nevet.

$a\colon \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R}\ \ n \mapsto 2n$

a sok betű és nyíl helyett azonban elterjedtebb egy sokkal egyszerűbb jelölés:

$a_n=2n$

Ebből mindenki tudja, hogy egy számsorozatról van szó, így minden más jelölés felesleges.
Szokás még, hogy elkezdjük a sorozat tagjait felírni, mondván, hogy ezzel megadtunk egy szabályt és így kell tovább folytatni a sorozatot, de lássuk be, hogy ez nem korrekt megadási mód.
Van még egy furcsa lehetőség a sorozat megadására, ez a **rekurzió**:

$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ és $a_1=1$, $a_2=1$

Ami annyit jelent, hogy a sorozat első két tagját megadtuk (mind a kettő 1), valamint, hogy ezekből hogyan lehet kiszámítani a többi tagot, mindig össze kell adni az előző két számot, így kapjuk a következőt. Jelen esetben tehát a sorozatunk: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, … (Ó, igen, a Da Vinci-kód óta ezt mindenkinek illik felismerni: a Fibonacci-sorozat)

Tulajdonságok, definíciók

Nevezetes sorozatok:

Számtani sorozat:

$a_n=a_1+(n-1)d$, ahol d a sorozat differenciája (különbsége), vagy másképpen

$a_n=a_{n-1}+d$ és mindkét esetben meg kell még adni a sorozat egyik tagját (praktikusan az elsőt)

Például a fenti $a_n=2n$ sorozat ilyen, ha ugyanis felírjuk a tagjait: 2, 4, 6, 8, 10, … a pozitív páros számokat kapjuk meg, de ezt úgy is megadhatjuk, hogy $a_1=2$ és d=2. (A d megadásából mindenkinek tudnia illik, hogy ez egy számtani sorozat.)
Sorozatoknál fontos lehet tudni, hogy az első néhány tagjának hogyan számolhatjuk ki gyorsan az összegét:

$$S_n=\frac{(a_1+a_n)n}{2}$$

Az elnevezést pedig onnan kapta, hogy bármely három egymás után következő tag esetén a középső éppen a két szélső **számtani közepe** (összegük fele).

$$a_n=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}$$

Mértani sorozat:
Hasonló a számtanihoz, csak itt nem mindig hozzáadni kell ugyanazt a számot, hanem meg kell vele szorozni.
$a_n=a_1q^{n-1}$, ahol q a sorozat kvóciense (hányadosa), vagy rekurzívan
$a_n=a_{n-1}q$ és a q-n kívül itt is kell még egy tag.
Például a 2, 4, 8, 16, 32, 64, … sorozat ilyen, $a_1=2$ és q=2.
$S_n=a_1\frac{q^n-1}{q-1}$
Az elnevezést pedig onnan kapta, hogy bármely három egymás után következő tag esetén a középső abszolútértéke éppen a két szélső **mértani közepe** (szorzatuk négyzetgyöke).
$|a_n| = \sqrt{a_{n-1}\cdot a_{n+1}}$

A sorozatok azonban nagyon gyakran nem a fenti két típus közül kerülnek ki, és a Főiskolán természetesen ilyenekkel lesz több dolgunk.
A sorozatok fontosabb tulajdonságai lehetnek:
- Monotonitás: a sorozat tagjai egyre nagyobbak és nagyobbak lesznek-e?
- Korlátosság: a tagok bizonyos értékek között maradnak-e?
- Konvergencia: a tagok egy bizonyos érték körül sűrűsödnek-e össze?

Fenti problémákkal Analízis órákon foglalkozunk bővebben…

Műveletek
A legtöbb itt megemlíthető dolog a felsőfokú tanulmányaik része, ezért itt külön nem foglalkozunk vele, viszont a **kamatszámítás** témaköre idevág és kell is vele foglalkozni.
Példa:
Minden év elején 100 000 Ft összeget elhelyezünk évi 5%-os kamatra 6 éven keresztül. Mennyi pénzünk lesz a hatodik év végén?

	eleje	vége
1. év	100000	100000*1,05
2. év	100000*1,05+100000	(100000*1,05+100000)*1,05= $100000(1{,}05^2+1{,}05)$
3. év	$100000(1{,}05^2+1{,}05)+100000=$ $100000(1{,}05^2+1{,}05+1)$	…
4. év	…	…
5. év	…	…
6. év	…	S= lásd a táblázat alatt!

$S=100000*(1{,}05^6+1{,}05^5+1{,}05^4+1{,}05^3+1{,}05^2+1{,}05^1)$
A zárójelben viszont egy mértani sorozat első hat tagjának összege szerepel, ahol $a_1=1{,}05$ és q=1,05:
$S=100000*1{,}05*\frac{1{,}05^6-1}{1{,}05-1}=714200{,}85$ Ft
Vagyis 10 év múlva 714201 Ft-tal leszünk gazdagabbak és a megoldáshoz felhasználtuk a mértanis sorozat összegképletét.

Kapcsolat, megjegyzések
Sorozatokkal sokat foglalkozik az Analízis c. tárgy, kamatot számolni pedig Mikroökonómiából és Pénzügyből kell…