Koordináta-geometria

Fogalom

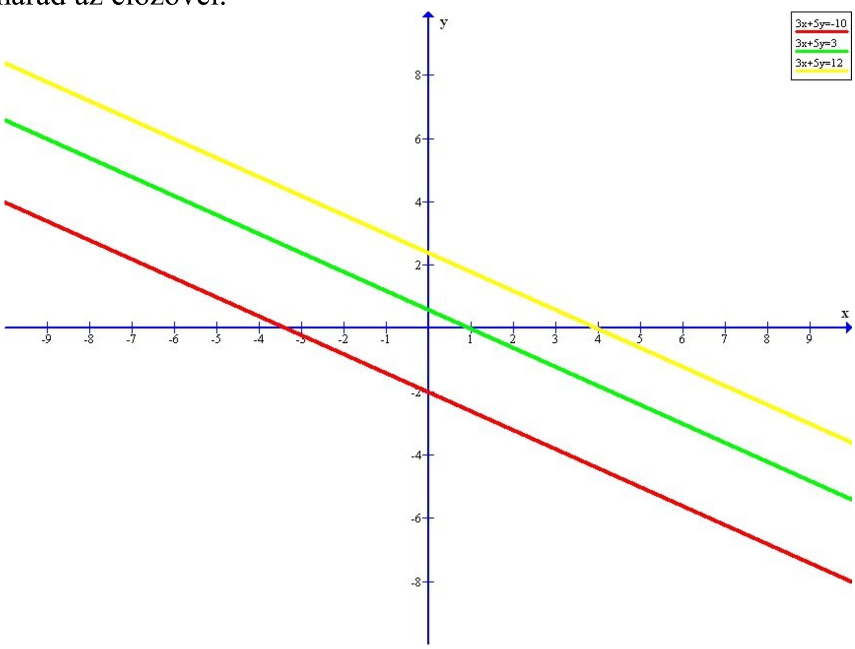
Ezen a helyen találkozik össze a számtan és a mértan. Körök, egyenesek, háromszögek és más egyéb alakzatok, de nem szerkesztenünk kell, vagy méricskélni, hanem számolni, viszont azt sokat. Mindent derékszögű koordináta rendszerben képzelünk el, de sokszor rajzot sem kell készítenünk (sőt lehet, hogy nem is tudunk!), mert e nélkül is remekül ki tudjuk számítani a végeredményt.

Jelölés

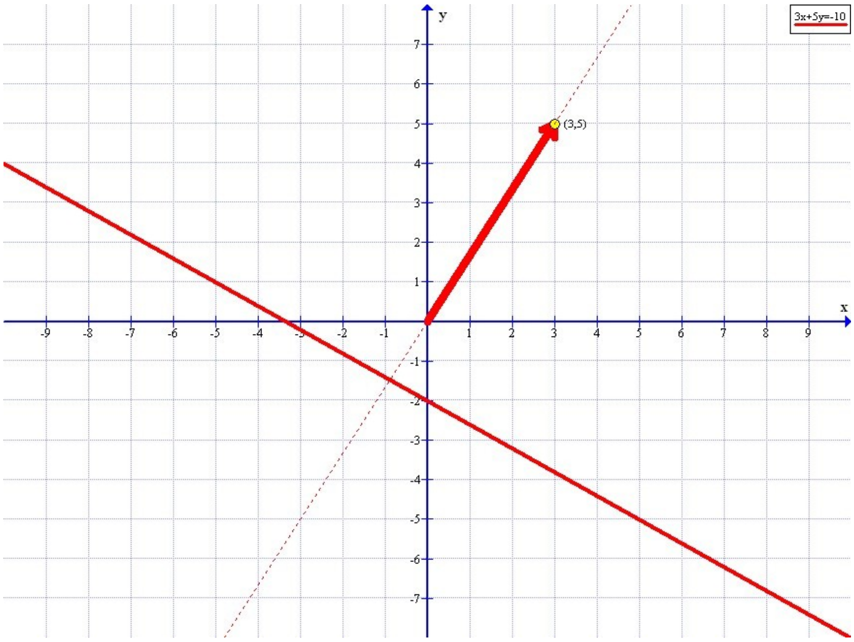
A **pontokat** a koordináta rendszerben általában nagybetűkkel jelöljük, mögötte zárójelben jön a két koordináta, először az x (vízszintes) azután az y (függőleges). Pl.: P(3,5)
A **vektorokat** félkövéren szedett kisbetűkkel vagy aláhúzott kisbetűkkel vagy a két végpontja fölé húzott nyíllal jelöljük. Ha itt koordinátákat adunk meg, akkor a vektor kezdőpontja az origó, és a koordináták a végpontjának a helyét jelölik. pl.: **v**(3,5), $\underline{v}$(3,5), $\overrightarrow{AB}$
Az **egyeneseket** kisbetűkkel jelöljük és kettőspont után adjuk meg az egyenletüket. Pl.: e:3x+5y=-2
A többi alakzat hasonlóan jelölhető:
kör k: $x^2+y^2-4x+6y+9=0$
parabola p: $y=x^2+4x+5$
ellipszis e: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$
hiperbola h: $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$

Tulajdonságok, definíciók

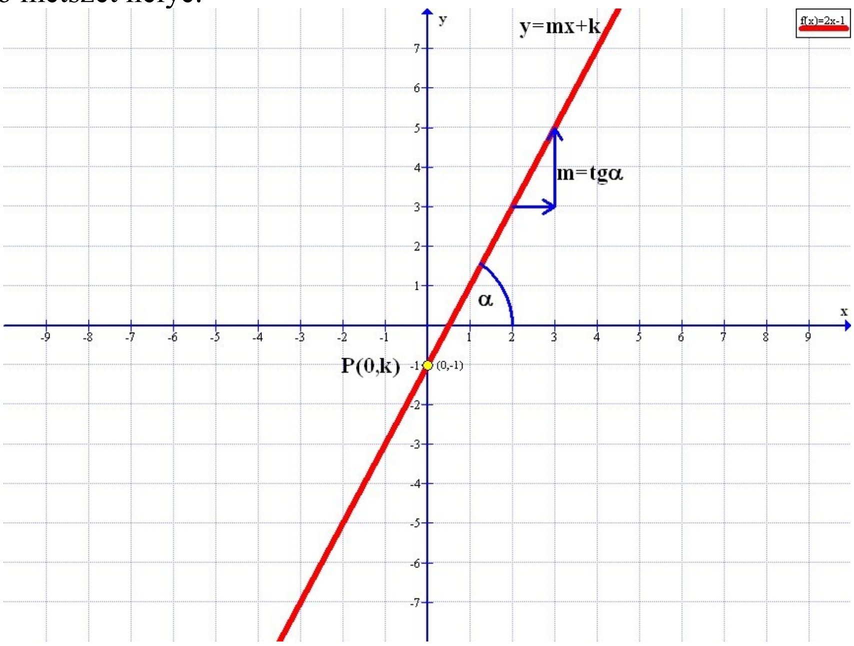
Egyenes
e:ax+bx=c
a és b értéke határozza meg az egyenes állását, ha csak c változik, akkor az egyenes párhuzamos marad az előzővel.



Az origóból a P(a,b) pontba mutató vektor merőleges az illető egyenesre, ő lesz az egyenes **normálvektora**.



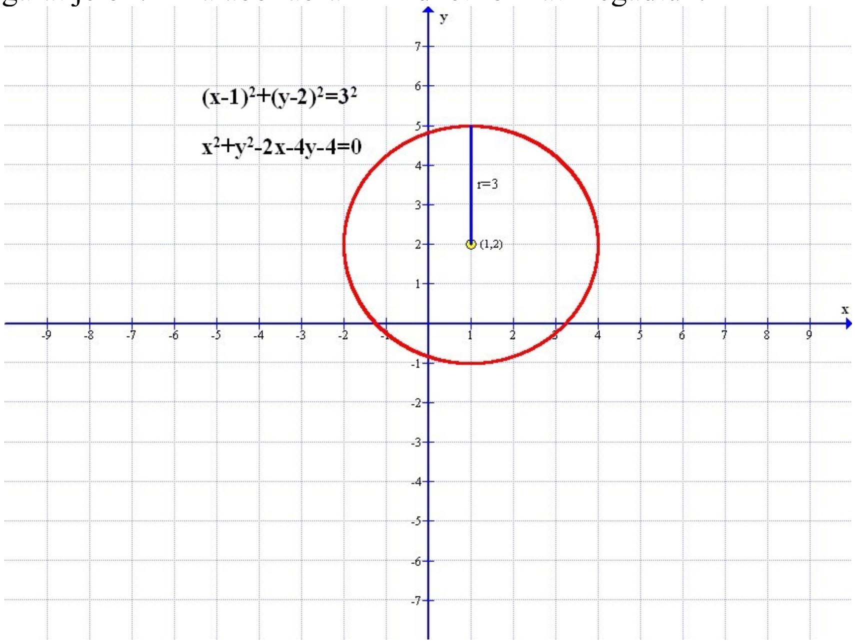
Ha az egyenes egyenletét átrendezzük, egyik oldalra az y-t, minden mást a túloldalra viszünk, akkor valami ilyesmit kapunk: e:y=mx+k. Ebben az esetben m a meredekség, k pedig az y tengellyel való metszet helye.



Kör

k: $x^2+y^2+Ax+By+C=0$ vagy

k: $(x-u)^2+(y-v)^2=r^2$ ez utóbbi szemléletesebb, ugyanis u és v a kör középpontjának koordinátái, míg r a kör sugarát jelöli. Az alábbi ábrán mindkét formát megadtuk.



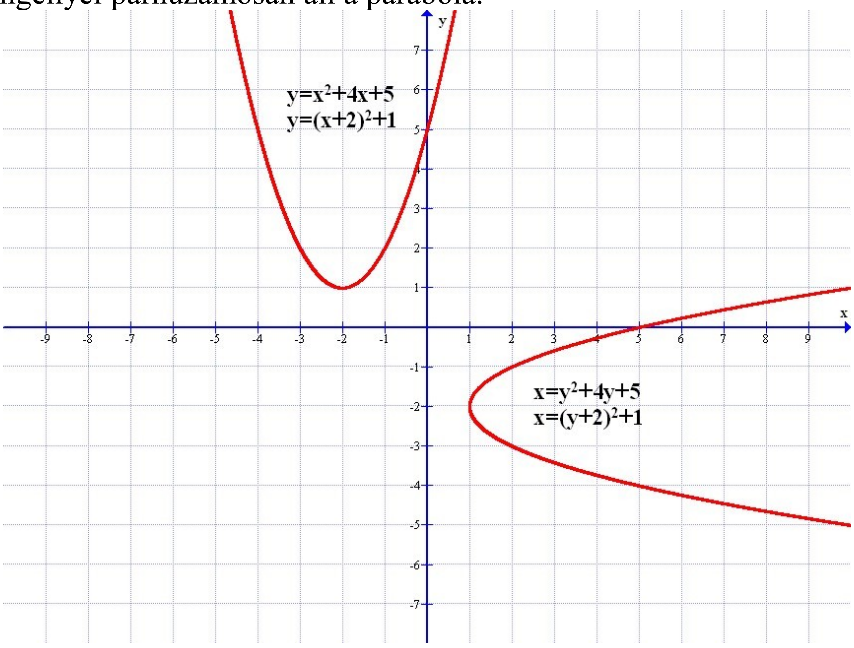
Parabola

p: $y=ax^2+bx+c$ vagy

p: $y=a(x-u)^2+v$ netán

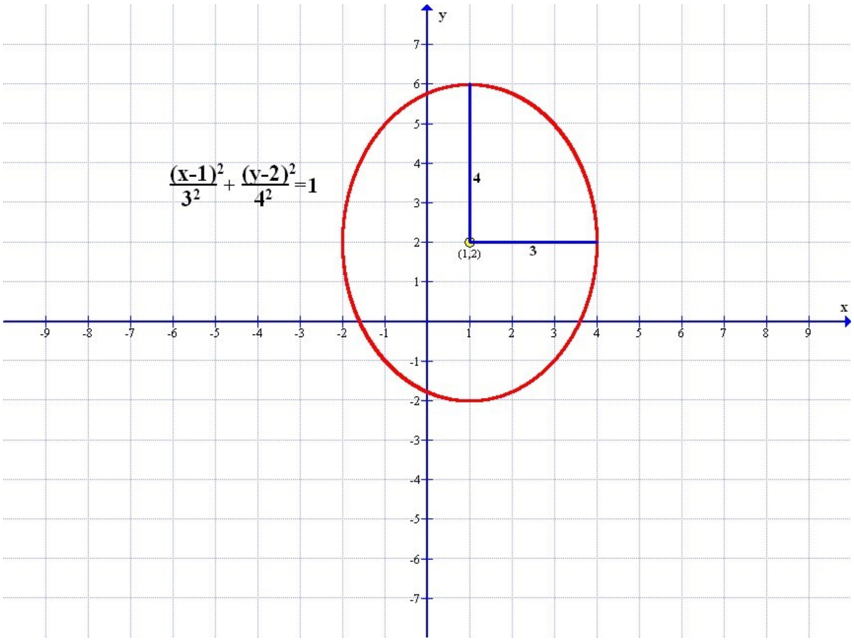
p: $Ax^2+Bx+Cy+D=0$

Illetve minden esetben felcserélhető az x és y szerepe! Ebben az esetben nem az y tengellyel, hanem az x tengellyel párhuzamosan áll a parabola.



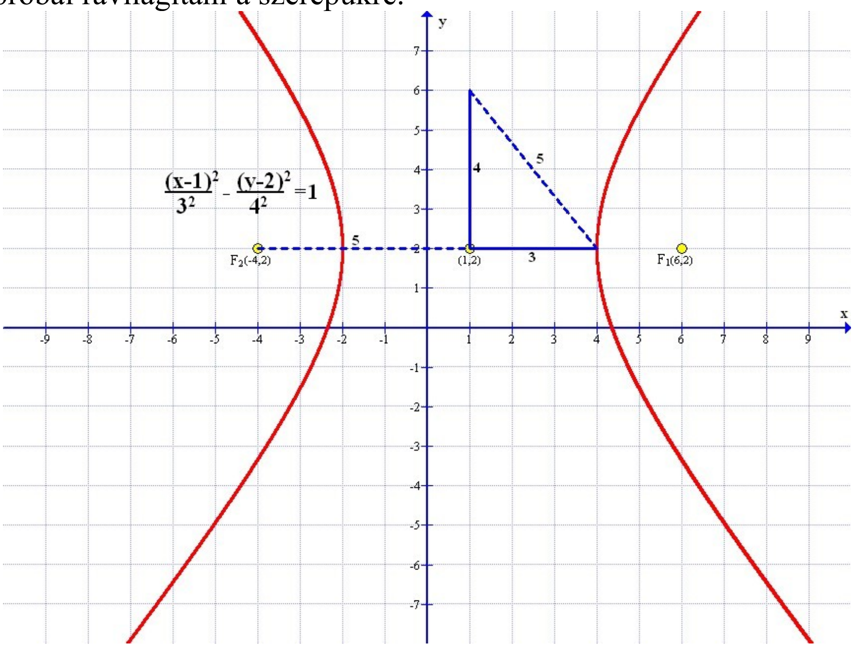
Ellipszis:

e: $\frac{(x-u)^2}{a^2}+\frac{(y-v)^2}{b^2}=1$, ahol u és v a „középpont” koordinátái, a és b pedig a „sugarak” értékei, ugyanis az ellipszis tekinthető a kör általánosításának is, valóban, ha a=b, akkor kört kapunk.



Hiperbola:

h: $\frac{(x-u)^2}{a^2}-\frac{(y-v)^2}{b^2}=1$, csupán egy összeadásjel lett kivonásra cserélve, mégis minden felborul, u, v továbbra is egyfajta „középpont”, de a és b már kevésbé szemléletes, az ábra azonban megpróbál rávilágítani a szerepükre.



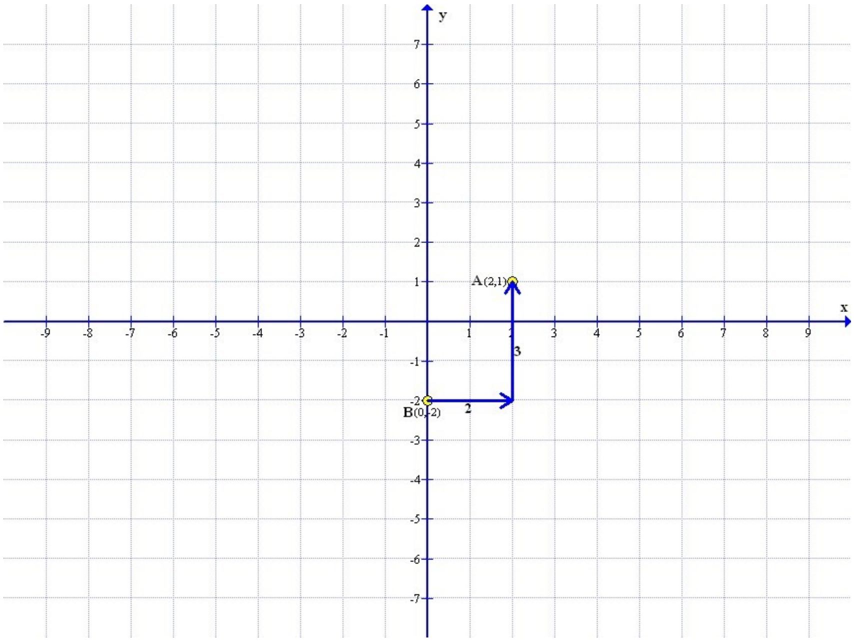
Műveletek

Tipikus probléma, hogy néhány adatból fel kell tudnunk rajzolni az illető alakzatot, illetve meg kell alkotnunk az egyenletét. A másik szintén tipikusnak mondható feladat az, hogy megtaláljuk két alakzat metszéspontját. Nézzünk mindegyikre példát!

1. példa:

Egy egyenes áthalad az A(2,1) és a B(0,-2) pontokon. Adjuk meg az egyenletét!

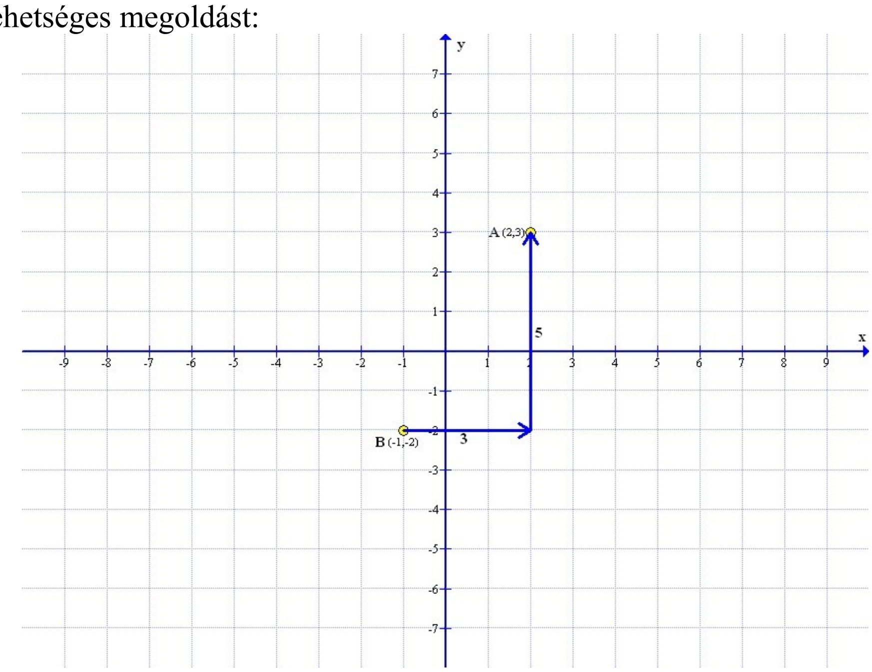
Ha képzeletben berajzoljuk a fenti két pontot a koordináta-rendszerünkbe, már láthatjuk is a megoldást:



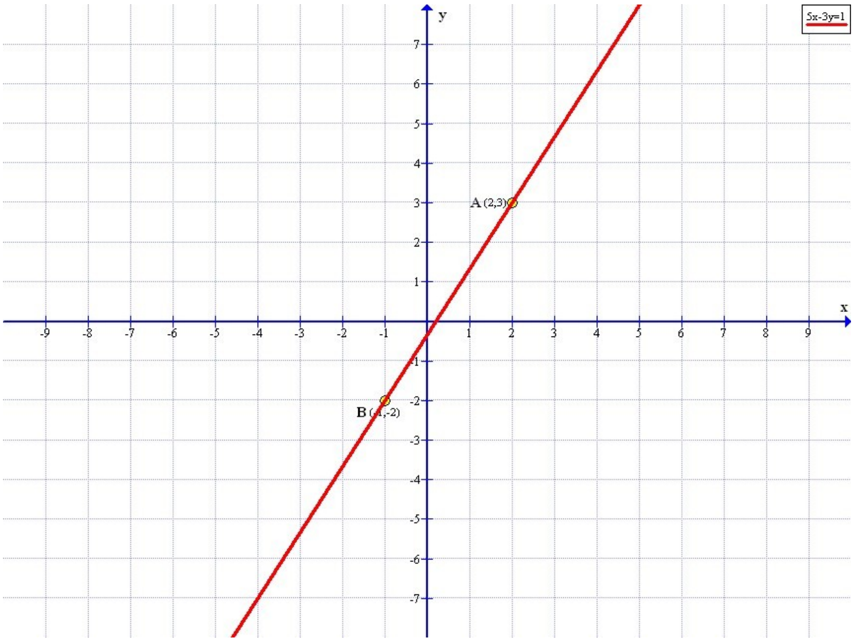
Az illető egyenes meredeksége $\frac{3}{2}$ =1,5, míg a tengelymetszete -2, vagyis egyenlete:

e: y=1,5x-2

Ha a pontokat egy kicsit arrébb visszük, már nem lesz ilyen szerencsénk, bár a meredekség még mindig könnyedén leolvasható, a tengelymetszet már nem annyira könnyű. Itt nézzünk egy másik lehetséges megoldást:

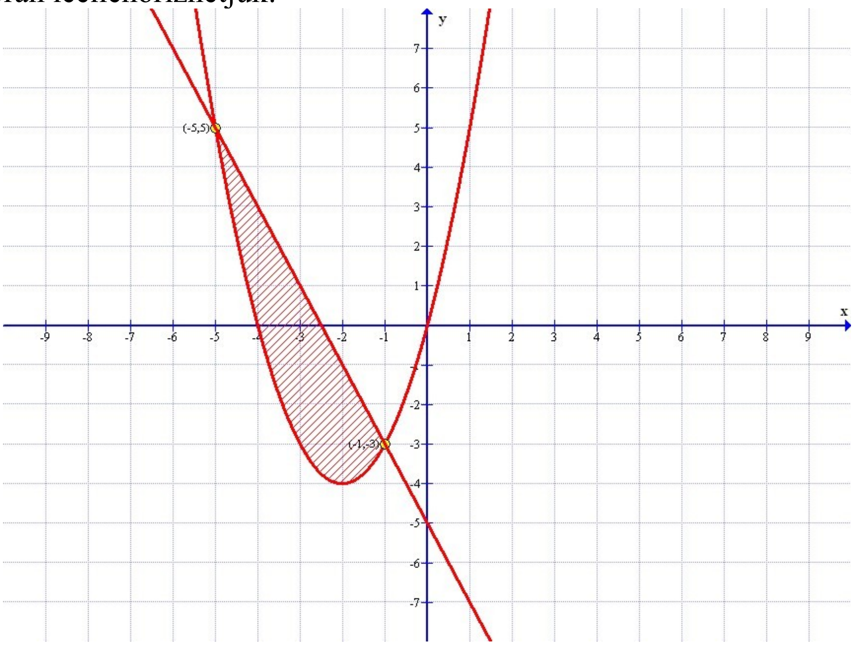


Először készítsük el a B-ből A-ba mutató vektort, annak is a koordinátáit, ehhez csak annyit kell tenni, hogy az A koordinátáiból kivonjuk a B koordinátáit:
v[2-(-1), 3-(-2)] azaz **v**(3,5), de mintha ezt már láttuk volna valahol, nem? A trükk most jön: cseréljük fel a két koordinátát, és az egyiknek vegyük az ellentettjét! Így jutunk a kérdéses egyenes normálvektorához.
n(5, -3) az egyenes egyenlete tehát úgy fog kezdődni, hogy 5x-3y, de mi jön utána? Hát x és y helyébe az A vagy a B pont valamelyikének koordinátáit be kell helyettesíteni, mindegy melyiket, ugyanannak a számnak kell kijönnie: 5*2-3*3=1 vagy 5*(-1)-3*(-2)=-5+6=1, ez kerül az egyenlet jobb oldalára.
e: 5x-3y=1



Ha ezt átrendezzük, akkor látszik a meredekség és a tengelymetszet is:
e: $y = \frac{5}{3}x - \frac{1}{3}$, amit az ábránk is igazol.

2. példa:
Keressük meg az $y=x^2+4x$ és a $2x+y=-5$ alakzatok metszéspontjait!
Ez nem más, mint két ismeretlen és két egyenlet, ráadásul másodfokú. Az egyenes egyenletéből fejezzük ki y-t és írjuk be a parabola egyenletébe:
$y=-5-2x$
$-5-2x= x^2+4x$
$0= x^2+6x+5$
megoldóképlet
$x_1=-1$ és $x_2=-5$ ebből már számolhatjuk y értékét.
a keresett pontok tehát $M_1(-1,-3)$ és $M_2(-5,5)$
Mindezt az ábrán leellenőrizhetjük:



Analízisből pedig azt is megtanuljuk, hogy a satírozott rész területét hogyan számolhatjuk ki…

Kapcsolat, megjegyzések

Elsősorban ismét Analízis, de mindez fontos lesz Operációkutatás órán és Mikroökonómiából is.