Kombinatorika

Fogalom

A matematika egyik legfurfangosabb része, sokszor nevetségesen egyszerűnek hangzó kérdésekkel, mégis könnyen el lehet veszni a megoldásban. Ebben a témakörben a feladatok általában így kezdődnek: hányféleképpen? Hányféleképpen rakhatjuk sorba, választhatjuk ki, színezhetjük ki, írhatjuk le, …
Ami közös, hogy mindig van véges darabszámú valamink (pl.: kártya, könyv, díj, levél, szám, ajándék, …), ami közül néhányat kiválasztunk. Lehet, hogy a következő húzás előtt visszatesszük az előzőleg választottat, lehet, hogy nem. Lehet, hogy fontos, milyen sorrendben válogattuk ki a tárgyainkat, lehet, hogy nem. Ez tehát a kombinatorika.
Nagyon sok lehetőség van, azonban a feladatok többsége hat típusba sorolható, ezeket néha tisztán fel lehet ismerni a feladatban, néha azonban kicsit összekeverednek.

Jelölés

Most nem annyira a jelölésekkel foglalkozunk, hanem a játékszenvedéllyel. Ezekben a feladatokban gyakran feltételezik rólunk, hogy megrögzött szerencsejátékosok vagyunk, ezért jobb, ha tisztában vagyunk bizonyos dolgokkal.

Szabályos pénzérme: Mezei pénzérme, aminek feldobásával szokták eldönteni, pl. hogy ki kezdjen. Az érme egyik oldalát fejnek, a másik oldalát írásnak hívjuk. Hogy melyik hogyan néz ki, az itt most érdektelen. Egyformán esélyes a fej és az írás dobása.
Szabályos dobókocka: A hat oldalán 1-től 6-ig vannak a számok, a szemben levő számok összege mindig 7. (1-6, 2-5, 3-4) Bármelyik értéket egyforma eséllyel dobhatjuk ki.
Magyar kártya: 32 lapos, 4 szín (zöld, piros, makk, tök) és színenként 8 figura (alsó, felső, király, ász, hetes, nyolcas, kilences, tízes).
Francia vagy römi **kártya**: 52 lap, 4 szín (káró, kör, pikk és treff), minden színből 13 lap (Ász, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, Jumbó, Dáma, Király)
Ötöslottó: 1-től 90-ig számozott golyók, ezek közül húznak ki 5 darabot, a sorrend nem érdekes.
Totó: 13 mérkőzésről kell előre megtippelni, hogy ki fog nyerni: 1, ha az otthoni csapat nyer, 2, ha a vendég csapat nyer, X, ha döntetlen lesz. Vannak még pluszmérkőzések is, de a kombinatorika példák általában ezzel nem törődnek.

Tulajdonságok, definíciók

Ismétlés nélküli permutáció
n db különböző dolgot kell az összes lehetséges módon sorba rakni. Egy ilyen sorba rakást hívunk egy permutációnak. A sorrend változtatgatását hívjuk permutálásnak. A permutációk számát egyszerűen megkapjuk: n-től kezdve szorozzuk össze az egész számokat egyesével lefelé haladva, amíg az egyet el nem érjük.
Például: hányféle sorrendben írhatjuk le az XYZ betűket? 3 betű, akkor 3*2*1=6, vagyis hatféleképpen. (XYZ, XZY, YXZ, YZX, ZXY, ZYX)
Mivel kicsivel is nagyobb számoknál nehézkes ezt a fajta szorzást jelölni, ezért kitalálták a **faktoriális**t.
$n!=n*(n-1)*(n-2)*\ldots*2*1$, ahol $n \in \mathbb{Z}^+$
Például $5!=5*4*3*2*1=120$
Megjegyzés: a legtöbb zsebszámológép 69 faktoriálisát tudja még kiszámolni, a hetvenét már nem.

Ismétléses permutáció

Itt is n dolgot kell az összes lehetséges módon sorba rakni, de nem mind különbözőek, hanem vannak közöttük egyformák, viszont pontosan tudjuk, hogy melyikből és mennyi. Ugyanúgy számolunk, mint az előbb, csak itt az egyformák darabszámának faktoriálisai bekerülnek a nevezőbe.

Például: rakjuk sorba a MATEMATIKA szó betűit. Rakjunk rendet a betűk között: AAAEIKMMTT, az egyformák darabszáma tehát 3, 2 és 2 (A, M, T), összesen pedig tíz betű, így az eredmény:

$$\frac{10!}{3!\cdot 2!\cdot 2!} = 151200$$

Ismétlés nélküli kombináció

n különböző dolog közül kell kiválasztanom k darabot, de nem érdekel a kiválasztás sorrendje, viszont, ha egyszer valakit kiválasztottam, azt többet nem választhatom. Tipikus példája az ötöslottó. 90 számból kiválasztok öt darabot, de a húzás sorrendje nem érdekes, csak az öt kihúzott szám, és minden számot csak egyszer húzhatok ki. (A szelvény kitöltése felől is nézhetjük: öt számot kell beikszelni, de mindegy milyen sorrendben teszem és egy számot csak egyszer ikszelhetek be.)

Egy ilyen kiválasztást hívunk egy kombinációnak és az összes lehetséges kombinációk száma érdekel. A legegyszerűbb jelölése a végeredménynek: $\binom{n}{k}$ (ejtsd: en alatt a ká). Vigyázat nincs törtvonal, bár ez a jelölés egy törtet takar: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$

A lottónál maradva az eredmény tehát $\binom{90}{5} = \frac{90}{5!\cdot 85!}$ = 43 949 268.

Megjegyzés: a zsebszámológépeken ezt a funkciót egy *nCr* feliratú gomb látja el, azonban, ha a gép szigorúan definíció alapján számol, akkor a kilencven alatt az öt gondot fog okozni, ugyanis korábban láttuk, hogy már 70 faktoriálisát sem tudja a gép kiszámolni. Okosabb gépek előbb egyszerűsítik a törtet és csak utána szorozgatnak. Érdemes kipróbálni, hogy a saját gépünk mennyire „okos”.

Ismétléses kombináció

n különböző dolog közül kell kiválasztanom k darabot, de nem érdekel a kiválasztás sorrendje, és függetlenül attól, hogy egyszer valakit már kiválasztottam, legközelebb ismét választhatom. Nem is olyan könnyű életszagú példát találni. Három darab színes golyó van egy urnában. Kettőt húzok egymás után, de az első húzást követően visszateszem a golyót. Hány színösszeállítást húzhatok ki? Szerencsére ezt fejben is össze tudjuk számolni. Három szín kell: piros, kék, zöld.

pp, pz, pk, zz, zk, kk azaz összesen hat színösszeállítás lehetséges. Itt is van persze általános képlet: $\binom{n+k-1}{k}$, jelen esetre alkalmazva $\binom{3+2-1}{2} = \binom{4}{2} = 6$

Megjegyzés: érdekes, hogy ezt sem középiskolában, sem felsőbb szinten nem szokás számon kérni, de még csak azt sem szoktuk megkövetelni, hogy a hallgató ráismerjen erre az esetre. Értehetetlen…

Ismétlés nélküli variáció
Ugyanaz, mint a kombináció, csak itt már az is számít, hogy milyen sorrendben választjuk ki az illető dolgokat, és egyelőre itt sem lehet ugyanazt többször választani. Például egy versenyen az első három helyezettet díjazzák, nem mindegy, ki lesz az első és ki a harmadik. Legyen, összesen mondjuk tíz versenyző. Hány különböző díjkiosztó lehetséges?
Ez első díjat kaphatja 10 versenyző, a másodikat már csak kilenc, mígy a harmadikat már csak nyolcféleképpen választhatjuk ki. Ez összesen 10*9*8 lehetőség. A korábbi jelöléseket alkalmazva ez $\frac{10!}{7!} = \binom{10}{3}3!$
Általánosan: $\frac{n!}{(n-k)!} = \binom{n}{k}k!$

Ismétléses variáció
n db különböző dolog, k darabot választunk, érdekel a sorrend és egy dolgot többször is ki lehet választani: Tipikus példa: totó. Három dolog közül kell választani (1, 2, x) tizenháromszor (az ismétlés tehát elkerülhetetlen) és számít, hogy az első mérkőzést tippelem döntetlenre vagy a negyediket. Minden alkalommal háromféleképpen dönthetek, ez 3^{13} draba lehetőség, vagyis ennyi különböző szelvényt tudok kitölteni.
Általánosan: n^k
Megjegyzés: a zsebszámológépeken ezt a funkciót egy *nPr* feliratú gomb látja el, azonban, ha a gép szigorúan definíció alapján számol, akkor nagy n érték már gondot fog okozni. Lásd feljebb!

Összefoglalás

n elem	k	Sorrend	Ismétlés	Név	Jelölés	Képlet
különböző	-	Számít	Nincs	Permutáció	P_n	$n!$
k_1, k_2, k_3, … db egyforma			Van speciális		$P_n^{(k_1,k_2,k_3,\ldots)}$	$\frac{n!}{k_1!k_2!k_3!\ldots}$
különböző	k<=n		Nincs	Variáció	V_n^k	$\frac{n!}{(n-k)!}$
különböző			Van		$V_n^{k(i)}$	n^k
különböző	k<=n	Nem számít	Nincs	kombináció	C_n^k	$\binom{n}{k}$
különböző			Van		$C_n^{k(i)}$	$\binom{n+k-1}{k}$

Műveletek

Hogyan tudom mégis kiszámolni például a 90 alatt az 5 értékét, ha a zsebszámolóm buta?
Úgy, hogy a törtet egyszerűsítem:

$$\binom{90}{5} = \frac{90!}{5! \cdot 85!} = \frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86 \cdot 85!}{5! \cdot 85!} = \frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}{5!}$$

Ezt pedig már bármilyen zsebszámolóba be tudom pötyögni.

Kapcsolat, megjegyzések

Valószínűségszámításból ezek bizony mind újra elő fognak kerülni…