Hatvány, gyök, logaritmus

Fogalom

A **hatványozás** eredetileg a szorzás egyszerűbb jelölésére szolgált.

$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\,db}$, ekkor $a \in \mathbb{R}$ és $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

Például: $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

A **gyökvonásnál** fordítva gondolkozunk, itt ismerjük a hatványozás eredményét és a kitevőt, és keressük azt a számot, amit a kitevőre hatványozva, az adott eredményt kapjuk. Ha két ilyen érték is van, akkor a nemnegatívat választjuk!

Például: $\sqrt[3]{8} = 2$, mert $2^3=8$

A **logaritmus** esetében is fordítva gondolkodunk, ismerjük a hatványozás eredményét és az alapot, amit hatványoztunk, de nem tudjuk, mennyi volt a kitevő.

Például: $\log_2 8 = 3$, mert $2^3=8$ (kettőt hányadikra emeltük, ha nyolcat kaptunk?)

Megjegyzés: a logaritmusnak a zsebszámológép előtti világban komoly haszna volt, ugyanis segítségével például a szorzást összeadássá lehetett egyszerűsíteni.

Jelölés

Hatványozásnál az alapot normál mérettel írjuk, a kitevőt pedig kisebb méretben a jobb felső indexbe.

Gyökvonásnál a gyökjel egy stilizált r betűt formáz, alá írjuk a hatványt, bal felső indexbe pedig a kitevőt, **kivéve**, ha a kitevő kettő, ekkor elhagyjuk.

Logaritmus esetében a log szócska után jobb alsó indexbe kerül a logaritmus alapja, majd utána normál mérettel a hatvány, **két kivétel** van: tízes alapú logaritmus esetén $\log_{10}$ helyett csak lg-t írunk, természetes alapú logaritmus esetén $\log_e$ helyett ln-t írunk.

Tulajdonságok, definíciók

A hatványozás azonosságai

I. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

II. $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

III. $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

IV. $(ab)^n = a^n b^n$

V. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

A fenti azonosságok egyszerűen következnek abból a tényből, hogy a hatványozás a szorzás másik jelölése.

A hatványfogalom kiterjesztése:
A cél az, hogy a kitevőbe ne csak pozitív egész számot írhassunk, de a fenti 5 db azonosság továbbra is érvényben maradjon.

$a^0 := 1$, ekkor $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ és $n \in \mathbb{N}$

$a^{-k} := \frac{1}{a^k}$, ekkor $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ és $n \in \mathbb{Z}$

$a^{\frac{p}{q}} := \sqrt[q]{a^p}$, ekkor $a \in \mathbb{R}^+$ és $n \in \mathbb{Q}$

Vagyis ahogy bővül a lehetséges kitevők köre, úgy szűkül az alapé.
Természetesen lehet értelmezni **irracionális** kitevőt is, ehhez azonban a határérték fogalmát kell ismerni. Itt legyen elég annyi, hogy jó közelítéssel megkapjuk a kívánt eredményt, ha az irracionális kitevőt közelítjük egy racionális értékkel… (pl.: tudnunk kellene mennyi $3^{\sqrt{2}}$, ehelyett kiszámoljuk $3^{1,41}$-t, ugyanis a $\sqrt{2}$ körülbelül 1,41)
Innentől kezdve a hatványozás már nem a szorzás egyszerűbb jelölése, hanem egy **új művelet**, saját tulajdonságokkal, azonosságokkal, szabályokkal.
A gyökvonás majdnem megegyezik a törtkitevős hatványozással, de azért nem teljesen, ugyanis gyököt vonni lehet negatív számból is, de törtkitevőre emelni nem lehet negatív számot.
Ha ugyanis lehetne, akkor nagy gubanc lenne:

$-2 = \sqrt[3]{-8} = (-8)^{\frac{1}{3}} = (-8)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{(8)^2} = \sqrt[3]{8} = 2$, de még mekkora!

A gyökvonás azonosságai:
Maradjunk a leggyakrabban használt négyzetgyöknél:

I. $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$, itt $a,b \in \mathbb{R}^+_0$

II. $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, itt $a \in \mathbb{R}^+_0, b \in \mathbb{R}^+$

III. $\sqrt{a^k} = (\sqrt{a})^k$, itt $a \in \mathbb{R}^+_0$, $k \in \mathbb{Z}$

Továbbá egy fontos negyedik azonosság: $\sqrt{a^2} = |a|$.

A logaritmus azonosságai:

I. $\log_a(pq) = \log_a p + \log_a q$, itt $a \in \mathbb{R}^+\setminus\{1\}$, és $p,q \in \mathbb{R}^+$

II. $\log_a(\frac{p}{q}) = \log_a p - \log_a q$, itt $a \in \mathbb{R}^+\setminus\{1\}$, és $p,q \in \mathbb{R}^+$

III. $\log_a(p^k) = k\log_a p$, itt $a \in \mathbb{R}^+\setminus\{1\}$, és $p \in \mathbb{R}^+$, $k \in \mathbb{R}$

IV. $\log_b p = \frac{\log_a p}{\log_a b}$, itt $a,b \in \mathbb{R}^+\setminus\{1\}$, és $p \in \mathbb{R}^+$

Műveletek

Nevezetes azonosságok:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

$$(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3$$

Kiemelés gyökjel alól:

$$\sqrt{a^2 + a^3} = \sqrt{a^2(1 + a)} = \sqrt{a^2}\sqrt{1 + a} = |a|\sqrt{1 + a}$$

$$\sqrt{75} = \sqrt{3 \cdot 25} = \sqrt{3}\sqrt{25} = 5\sqrt{3}$$

Bevitel a gyökjel alá:

$$a\sqrt{a\sqrt{a}} = a\sqrt{\sqrt{a^2}\sqrt{a}} = a\sqrt{\sqrt{a^3}} = a\sqrt[4]{a^3} = \sqrt[4]{a^4}\sqrt[4]{a^3} = \sqrt[4]{a^7}$$

Nevező gyöktelenítése:

$$\frac{5}{\sqrt[3]{4}} = \frac{5}{\sqrt[3]{4}} \cdot \frac{\sqrt[3]{4^2}}{\sqrt[3]{4^2}} = \frac{5\sqrt[3]{4^2}}{\sqrt[3]{4^3}} = \frac{5\sqrt[3]{4^2}}{4}$$

$$\frac{5}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} = \frac{5(\sqrt{3} - \sqrt{2})}{3 - 2} = 5(\sqrt{3} - \sqrt{2})$$

Kapcsolat, megjegyzések

A fenti ismeretek Analízis órákon jönnek a legjobban, a feladatokban elrejtve, közvetve kell használnunk ezt a tudásunkat.