

Halmazok

Fogalom

A halmazt alapfogalomnak tekintjük, nem definiáljuk. Hasonlóan nem definiáljuk a halmazhoz való tartozást sem, ez is alapfogalom. Példákkal, leírással tehetjük érthetővé, egyértelművé, miről is van szó.

Jelölés

A halmazokat általában nagybetűkkel, míg az elemeit kisbetűkkel szokás jelölni:

$a \in A$ (a eleme A-nak), illetve $b \notin B$ (b nem eleme B-nek)

Példák halmaz megadására:

$A = \{1, 2, 5\}$ akkor pl. $1 \in A$ de $3 \notin A$

$B = \{\text{páros természetes számok}\}$

Az a halmaz, amelynek egyetlen eleme sincs, az **üreshalmaz**, jele: \emptyset

Ha a halmaz **elemeinek a számát** kell jelölnünk, használjuk az abszolútérték jelet: $|C|$

A **számhalmazok** közül néhánynak megegyezés szerinti jele van:

\mathbb{N} természetes számok (0, 1, 2, 3...)

\mathbb{Z} egész számok (... , -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3...)

\mathbb{Q} racionális számok (két egész hányadosa)

\mathbb{Q}^* irracionális számok (végtelen, nem szakaszos tizedes törtek)

\mathbb{R} valós számok (racionális és irracionális számok együtt)

A számfogalom fejlődése:

- tárgyak megszámlálása: **természetes** számok (nulla is!)
- kivonás elvégezhetősége miatt: **egész** számok (negatív szám)
- osztás elvégezhetősége miatt: **racionális** számok (törtek)
- racionális számok: két egész szám hányadosa:
 - tizedestörtként véges, vagy
 - végtelen, de szakaszos
- **irracionális** számok: végtelen, nem szakaszos tizedestört
- gyökvonás elvégezhetősége miatt: valós számok (rac. és irrac. együtt)
- tovább is van: pl. **komplex** számok, itt a negatív számoknak is van gyöke (jele: \mathbb{C})

jelekkel: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, valamint $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \mathbb{Q}^*$

Tulajdonságok, definíciók

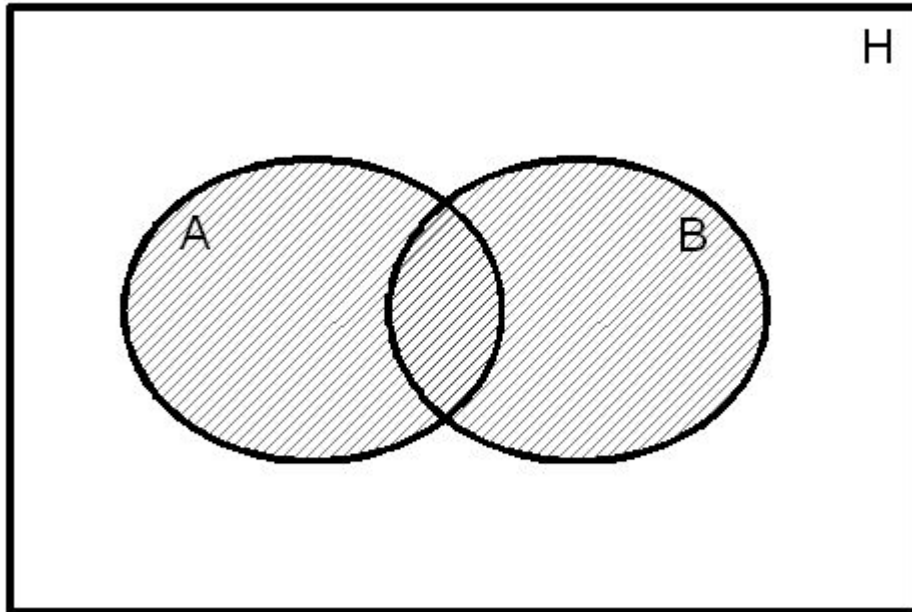
Két halmaz **egyenlő**, ha minden elemükben megegyeznek.

A halmazban minden elemet elég egyszer felsorolni és az elemeknek nincs sorrendjük, nincs közöttük kitüntetett, minden elem egyenrangú.

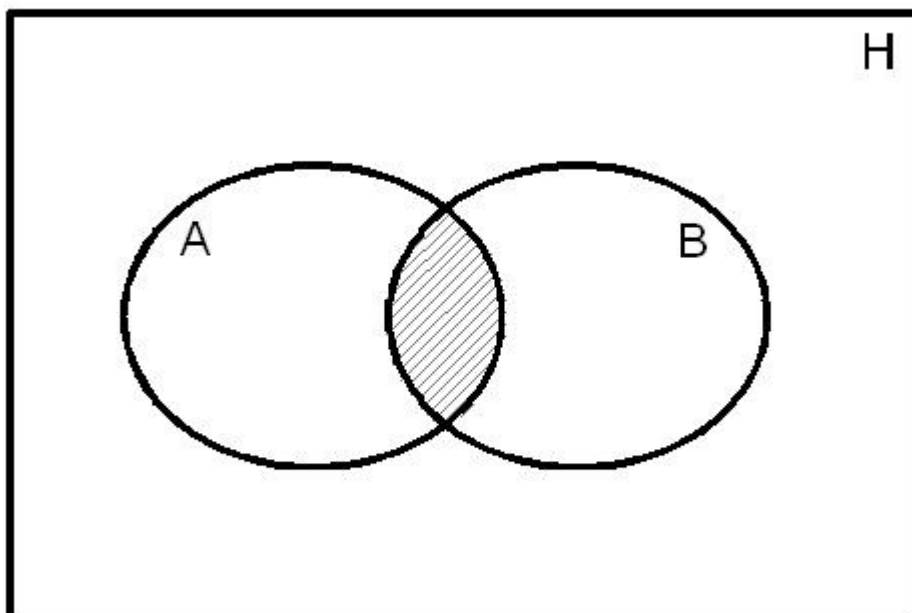
Ha az A halmaz minden eleme egyben a B halmaznak is eleme, azt mondjuk, A **részhalma** B -nek. Jele: $A \subset B$

Műveletek

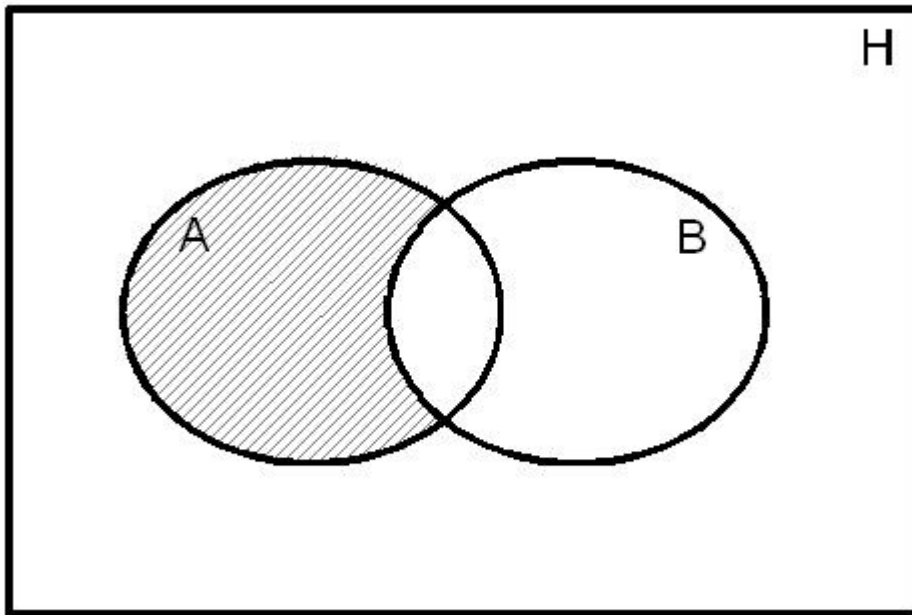
Unió, egyesítés: Két halmaz uniója az a halmaz, melynek elemei az eredeti két halmaz közül legalább az egyiknek elemei. Jelelkel: $A \cup B = \{x | x \in A \text{ vagy } x \in B\}$



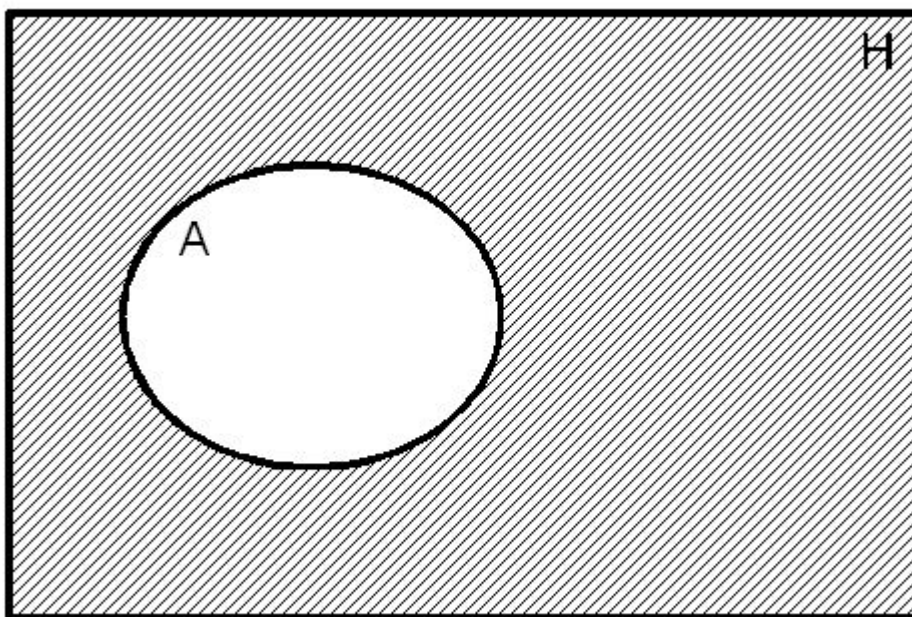
Metszet, közös rész: Két halmaz metszete az a halmaz, melynek elemei az eredeti két halmaz mindegyikének elemei. Jelelkel: $A \cap B = \{x | x \in A \text{ és } x \in B\}$



Különbség: Két halmaz különbsége az a halmaz, melynek elemei az első halmaznak elemei, de a másodiknak nem. Jelelkel: $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ és } x \notin B\}$



Komplementer: Egy halmaz komplementere a rajta kívül levő elemek halmazát jelenti. Természetesen ennek csak akkor van értelme, ha az eredeti halmaz egy un. alaphalmaznak a része. Jelelkel: Ha $A \subseteq H$, akkor $\overline{A_H} = H \setminus A$



A műveletek tulajdonságai, azonosságok:

$$A \cup A = A$$

$$A \cap A = A$$

$$A \cup \emptyset = A$$

$$A \cap \emptyset = \emptyset$$

$$A \cup H = H$$

$$A \cap H = A$$

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$\overline{\overline{A}} = A$$

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

$$A \cup \overline{A} = H$$

$$A \cap \overline{A} = \emptyset$$

$$A \setminus B = A \cap \overline{B}$$

...

Kapcsolat, megjegyzések

Halmazjelöléseket kell alkalmaznunk például a Gazdasági matematika I. c. tárgyban (analízis), de szemfülesek felfedezhetik, hogy ha az unió helyett összeadást, a metszet helyett pedig szorzást írunk, a halmazok helyébe pedig eseményeket képzelünk, akkor a Gazdasági matematika II. (valószínűségszámítás) tárgyban megismert eseményalgebrához jutunk. Hasonlóan eljuthatunk a matematikai logikához is, ami viszont az informatikában fontos.

Itt kell megjegyeznünk, hogy a magyar *vagy* szócska un. **megengedő vagyot** takar, azaz, ha azt mondom, hogy „egy szám eleme az A halmaznak vagy eleme a B halmaznak”, akkor előfordulhat, hogy az a bizonyos szám mindkét halmaznak eleme. Ha azt akarom kifejezni, hogy az illető szám a két halmaz közül csak az egyiknek lehet eleme, akkor a *vagy-vagy* párost kell használni (**kizáró vagy**): „egy szám vagy eleme az A halmaznak, vagy eleme a B halmaznak”. Ennek okán a manapság elterjedt és/vagy teljességgel értelmetlen.