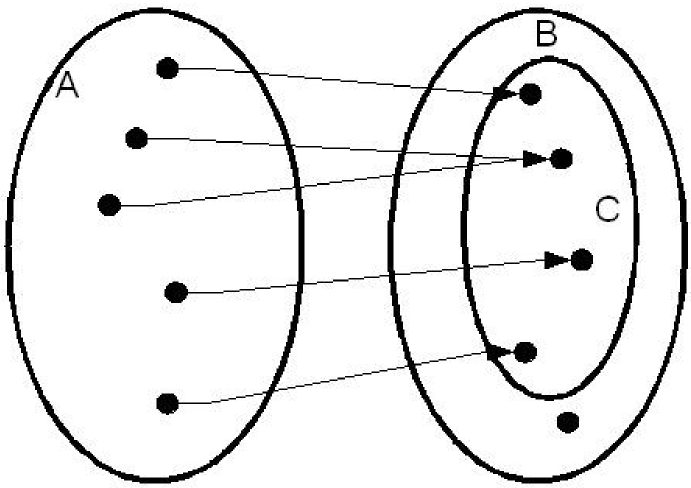
Függvények

Fogalom

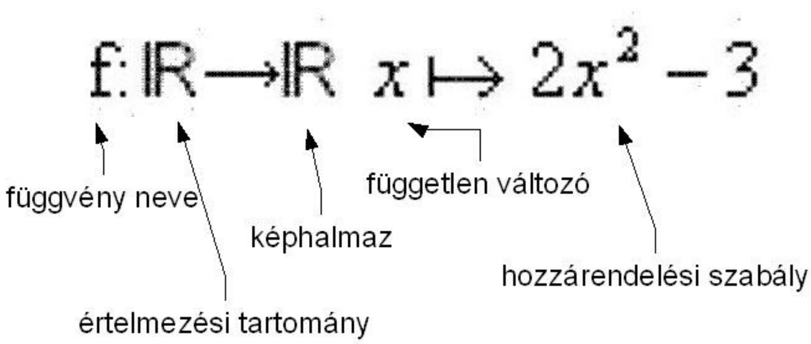
Ha egy A halmaz minden eleméhez egyértelműen hozzárendeljük egy B halmaz valamely elemét, akkor ezt a hozzárendelést függvénynek nevezzük. Az A halmaz a függvény **értelmezési tartománya**, a B halmaz pedig **képhalmaza**. A B halmaz azon részhalmaza, ami csak azokat az elemeket tartalmazza, amiket ténylegesen hozzárendeltünk valamihez (az ábrán C-vel jelölt halmaz) a függvény **értékkészlete**.



Jelölés

A függvényeket általában kisbetűkkel jelöljük, és többnyire nem az ábécé elejéről választunk betűt, hanem szokás szerint az f, g, h környékéről.

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\quad x \mapsto 2x^2 - 3$



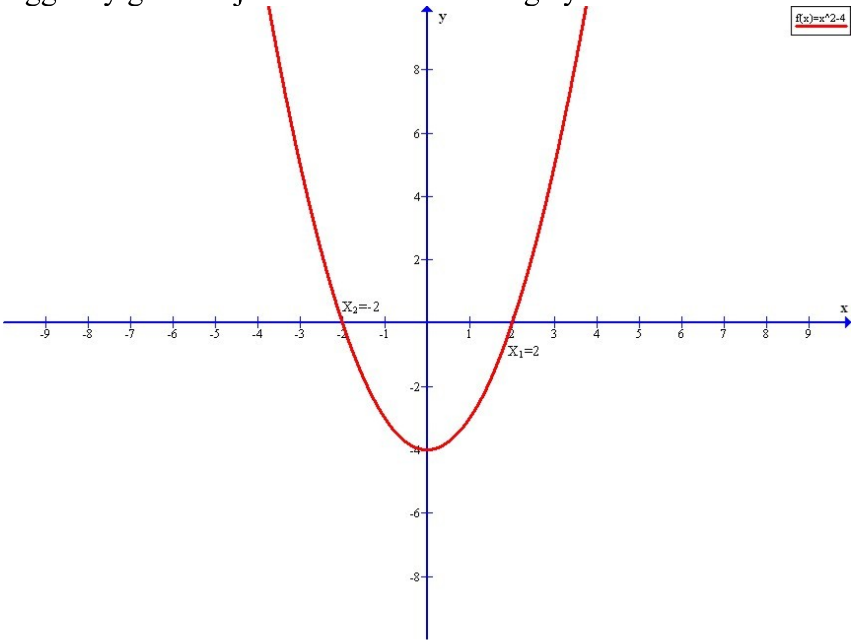
vagy csak egyszerűen $f(x)=2x^2-3$

Az értelmezési tartomány jele: D_f

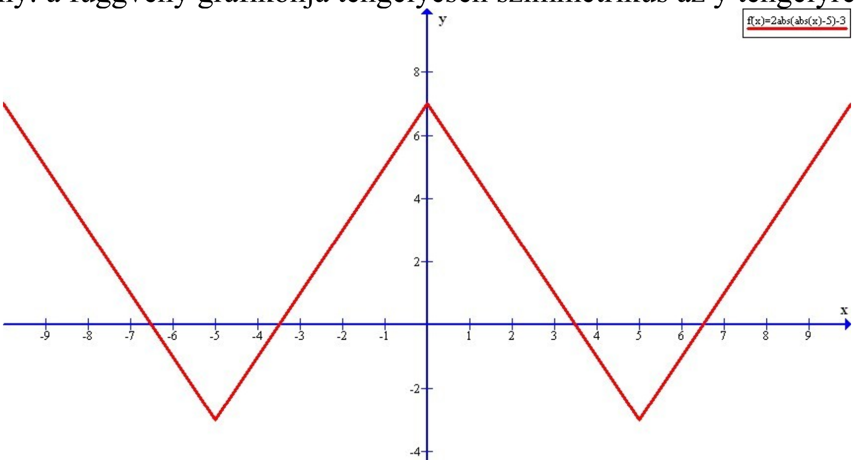
Az értékkészlet jele: R_f

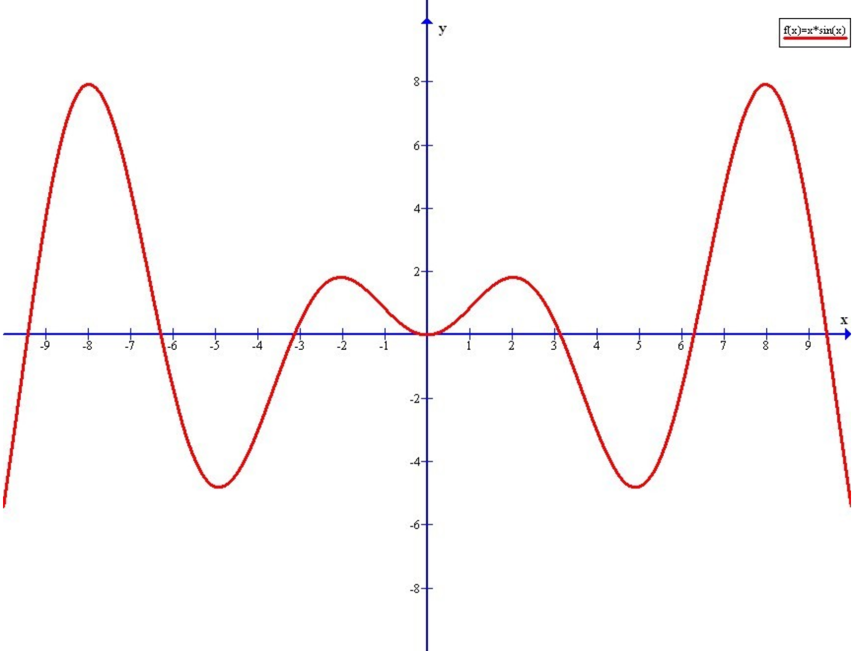
Tulajdonságok, definíciók

A függvények megadhatók táblázat segítségével, grafikonnal, hozzárendelési szabállyal…
Gyakori, hogy a függvényt összekeverik a grafikonjával, ez utóbbi szolgál a függvény szemléletsebbé tételére, de nem azonos vele.
A következő rövid részben pontos és egzakt definíciók helyett igyekszünk szemléletes képet adni néhány függvénnyel kapcsolatos fogalomról:
Zérushely: a függvény grafikonja itt metszi el az x tengelyt.

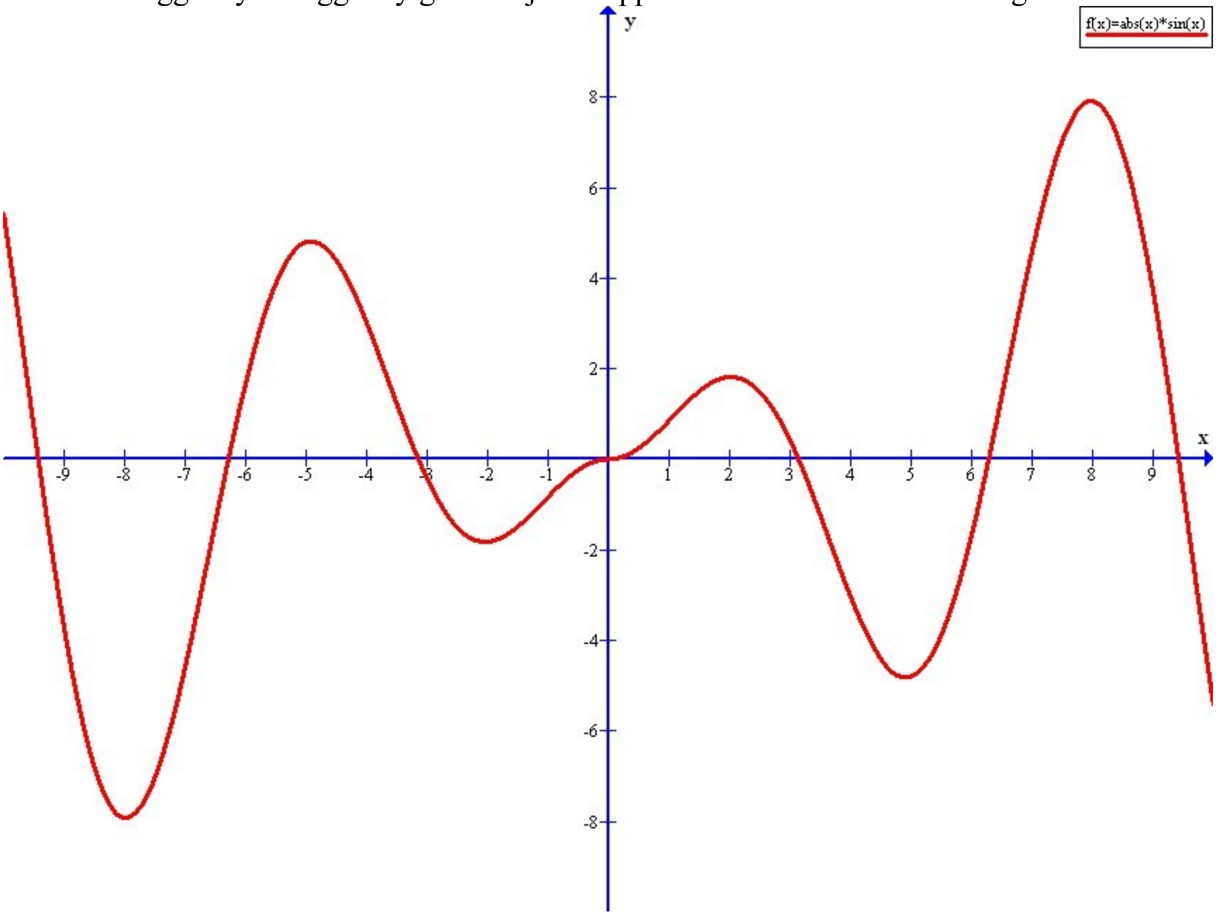


Páros függvény: a függvény grafikonja tengelyesen szimmetrikus az y tengelyre.

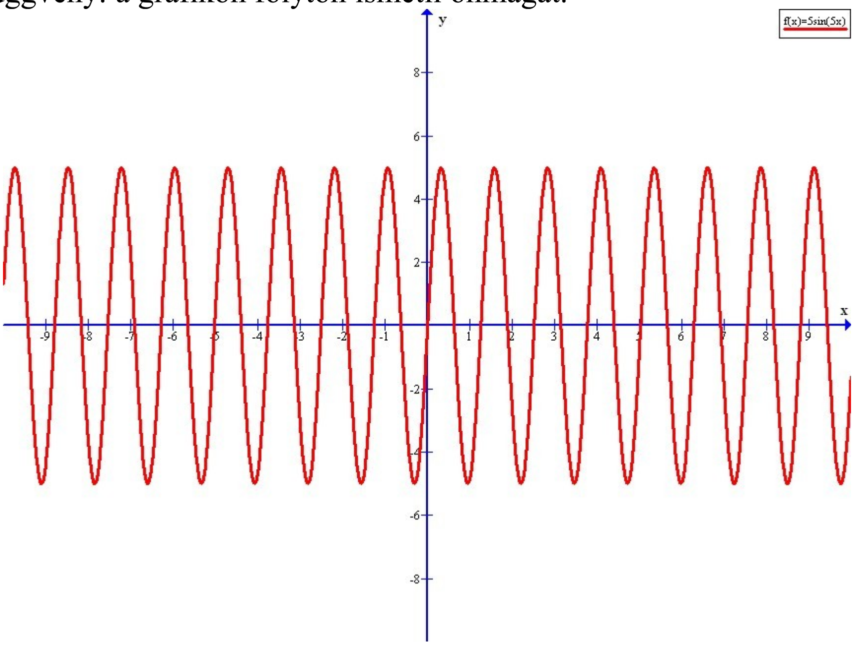




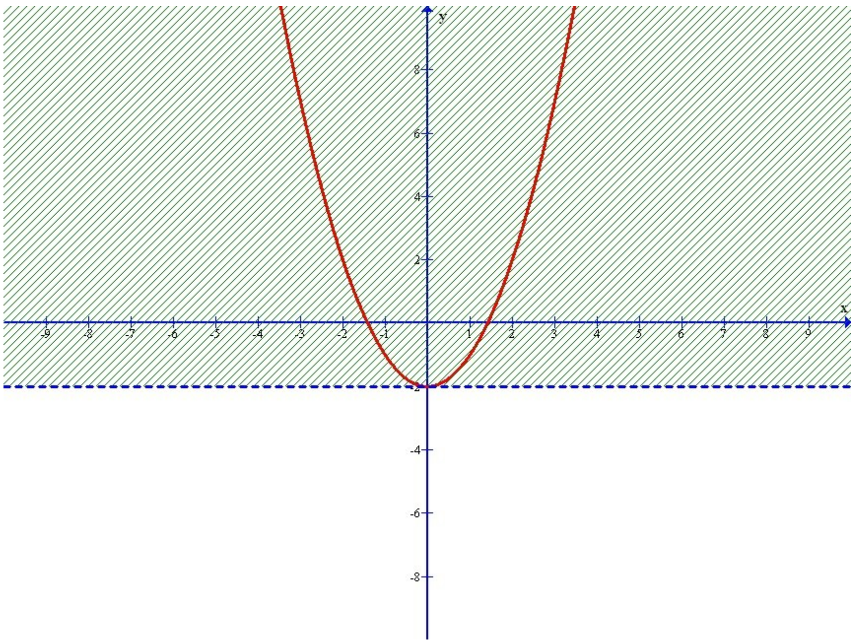
(megjegyzés: a legtöbb függvény se nem páros, se nem páratlan!)
Páratlan függvény: a függvény grafikonja középpontosan szimmetrikus az origóra.



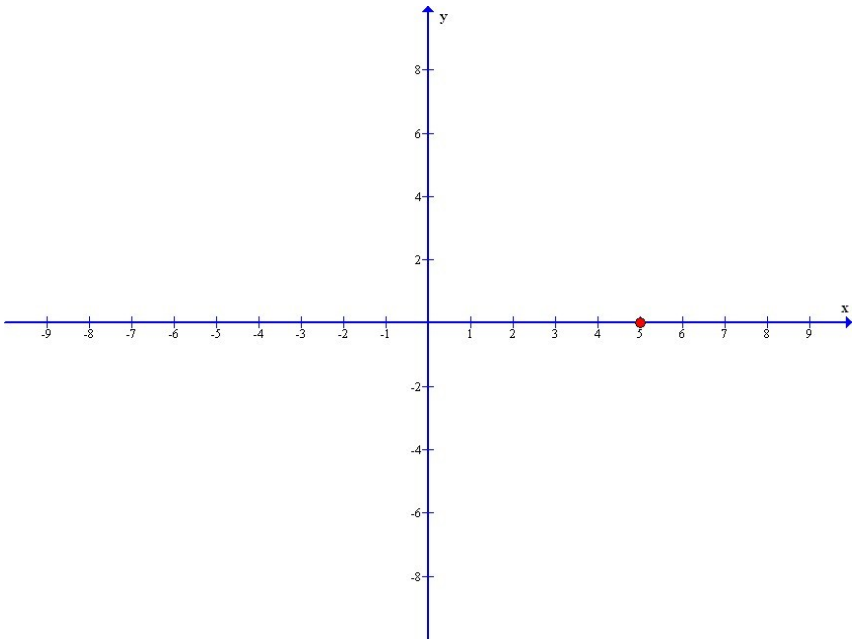
Periodikus függvény: a grafikon folyton ismétli önmagát.



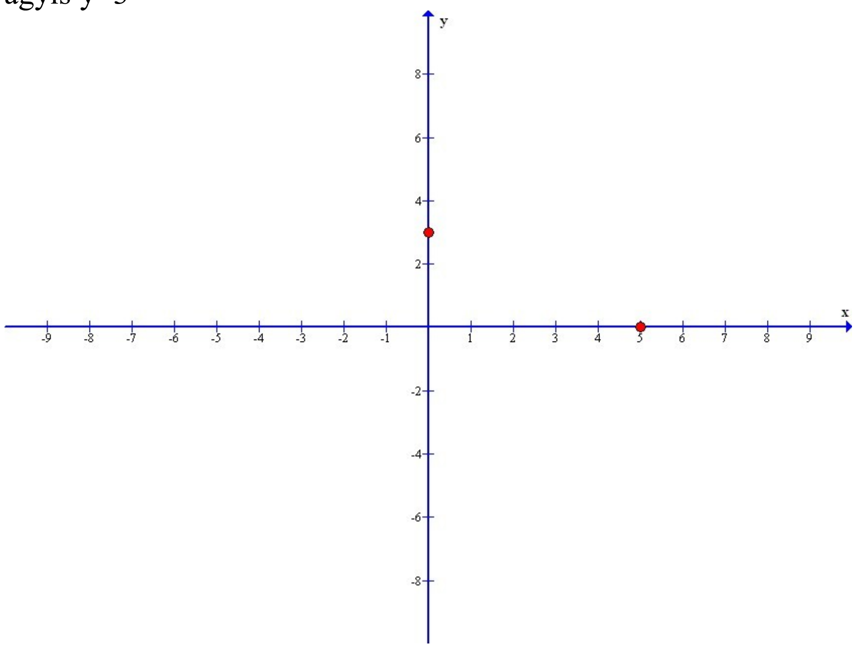
Felülről (alulról) **korlátos** függvény: a grafikon soha nem megy egy bizonyos y érték fölé (alá).



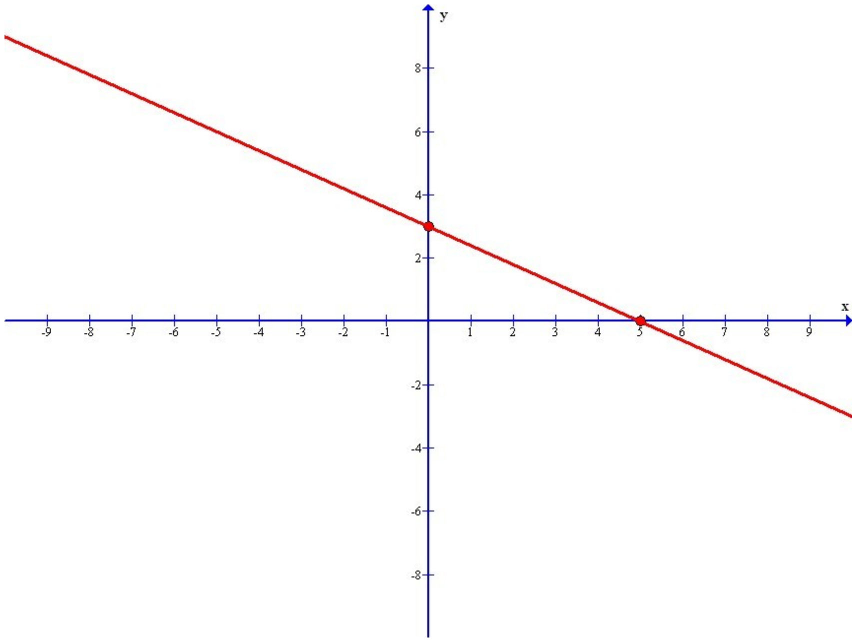
Elemi függvények
Konstans függvény: nem túl izgalmas, f(x)=c, ahol c egy rögzített valós érték
Lineáris függvény: grafikonja egy egyenes, ami valahol metszi az x tengelyt, alakja f(x)=ax+b, $a \neq 0$
Ezen két típusból meglehetősen sokat kell majd rajzolni Operációkutatásból, itt el is időzünk egy darabig.
Ábrázoljuk például a 3x+5y=15 függvény grafikonját! Hogy ez hogy jön ide? Rendezzük át az előbbi egyenlőséget y-ra:
5y=15-3x, osszunk 5-tel
$y = 3 - \frac{3}{5}x$, így már talán jobban felismerhető, hogy itt egy függvény hozzárendelési szabályát láthatjuk, akkor pedig van grafikonja is, és az y=ax+b alak is stimmel, az a értéke $-\frac{3}{5}$, a b pedig +3. A grafikon ezek szerint egy egyenes. Az egyenes megrajzolásához pedig elegendő ismernünk két pontját, legyenek ezek a tengelyekkel való metszéspontok. Ha az x tengelyt metszi az egyenesünk, akkor a metszéspontban az y értéke éppen 0. Írjuk ezt be az eredetileg megadott egyenlőségbe!
3x+5*0=15, innen azt kapjuk, hogy x=5. Máris meg van az egyik pontunk:



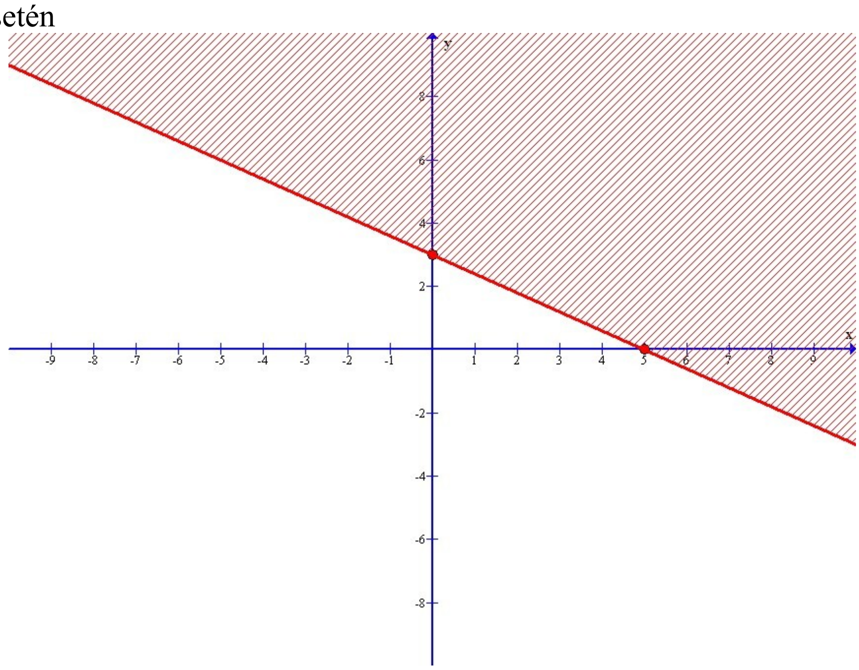
A másik tengely metszésekor az x értéke lesz 0, így:
3*0+5y=15, vagyis y=3



Most már csak össze kell őket kötni:

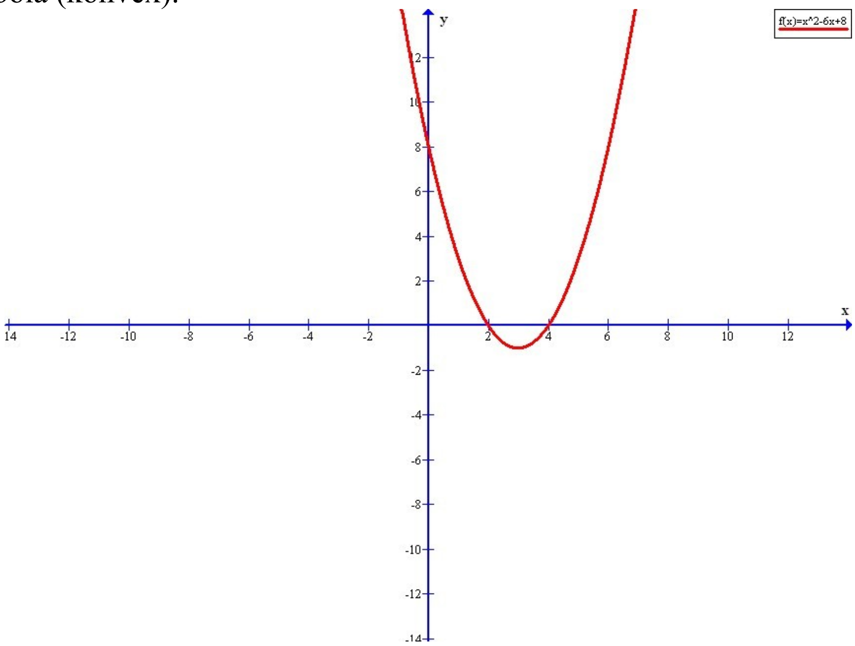


Gondot az okozhat, ha az egyenes y=ax alakú, ekkor ugyanis a két tengelyt egyszerre metszi egyenesünk, az origóban. Sebaj, akkor egy pont már meg is van, a másikat meg pl. megkapjuk, ha az x helyébe egyet helyettesítünk.
Ha az eredeti probléma nem egyenlőség, hanem egyenlőtlenség, akkor is így kell eljárnunk, csak a végén meg kell vizsgálni, hogy az egyenes alatti vagy feletti félsíkot kell-e még hozzávennünk a megoldáshoz (mindez attól függ, hogy az y a „kacsacsőr" melyik oldalán és milyen előjellel szerepel):
$3x+5y\geq 15$ esetén

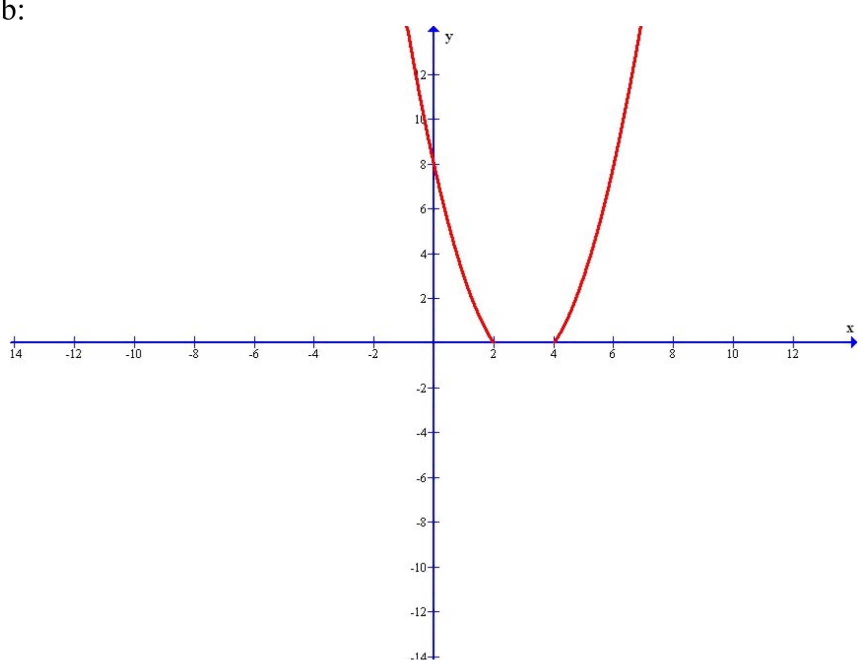


Másodfokú függvény: grafikonja egy **parabola**, általános alakja: $f(x)=ax^2+bx+c$, ahol $a\neq 0$. Másodfokú egyenletek, egyenlőtlenségek megoldásakor jó, ha ismerjük a hozzá tartozó függvény grafikonját, mert arról sok mindent leolvashatunk.
Például: $x^2-6x+8\geq 0$

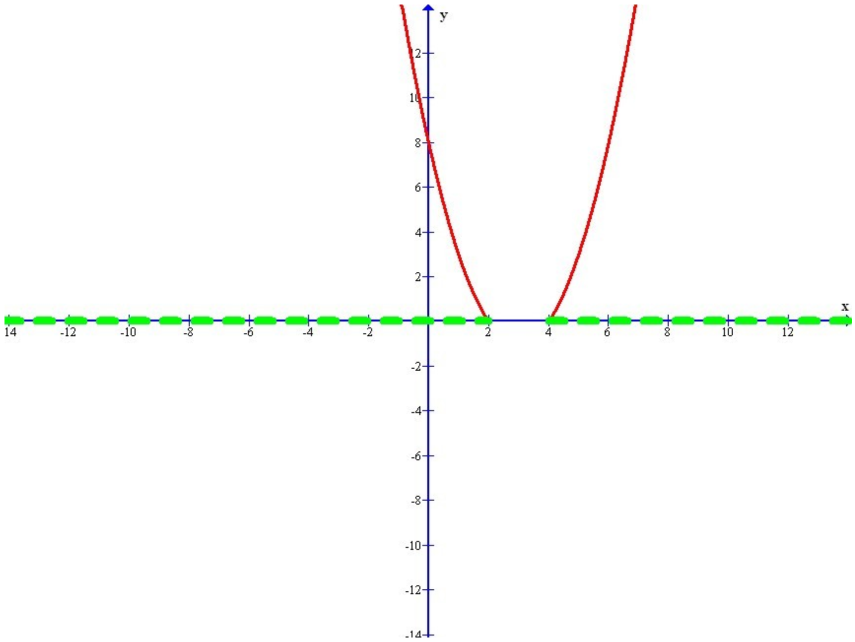
Ha bedobjuk a másodfokú egyenlet megoldó képletébe (a=1, b=-6, c=8), akkor azt kapjuk, hogy $x_1=2$ és $x_2=4$, vagyis az f(x)= x^2-6x+8 függvény grafikonja két helyen metszi az x tengelyt, 2-nél és 4-nél és mivel a négyzetes tag együtthatója pozitív (a=1), ezért felfelé nyitott a parabola (konvex).



Minket azonban az érdekel, hogy milyen x értékek esetén lesz a függvényérték nulla vagy annál nagyobb:



Innen pedig már leolvasható, hogy x≤2 vagy x≥4 esetén teljesül az eredetileg megadott egyenlőtlenség.



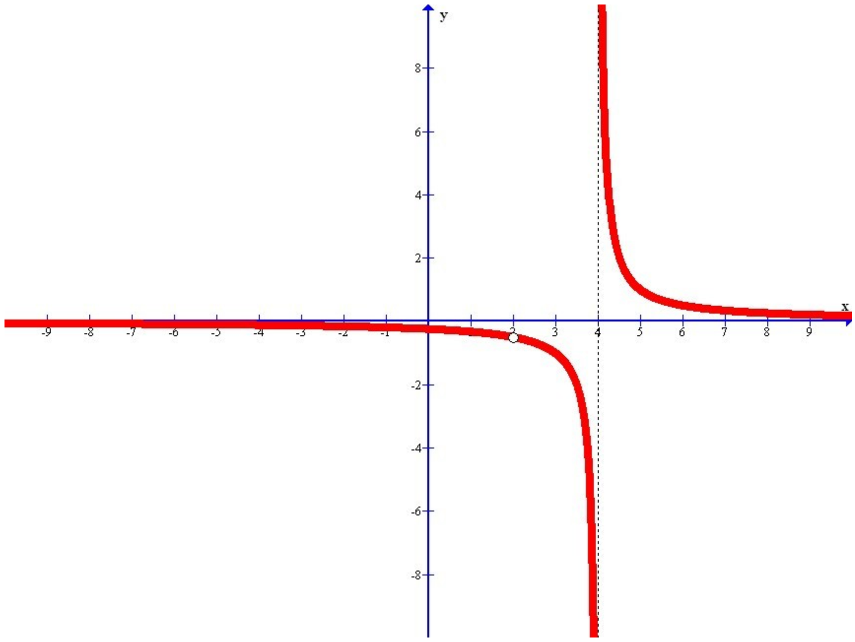
Magasabb **polinom**függvény: a fenti sor folytatása, vagyis itt az x már magasabb kitevőn is szerepel, a legkülönbözőbb együtthatókkal. Pl.: $f(x)=x^5+3x^4+2x^3-5x-1$. Maximum annyi zérushely lehet, mint a legmagasabb fokú tag fokszáma (a példában ez 5)

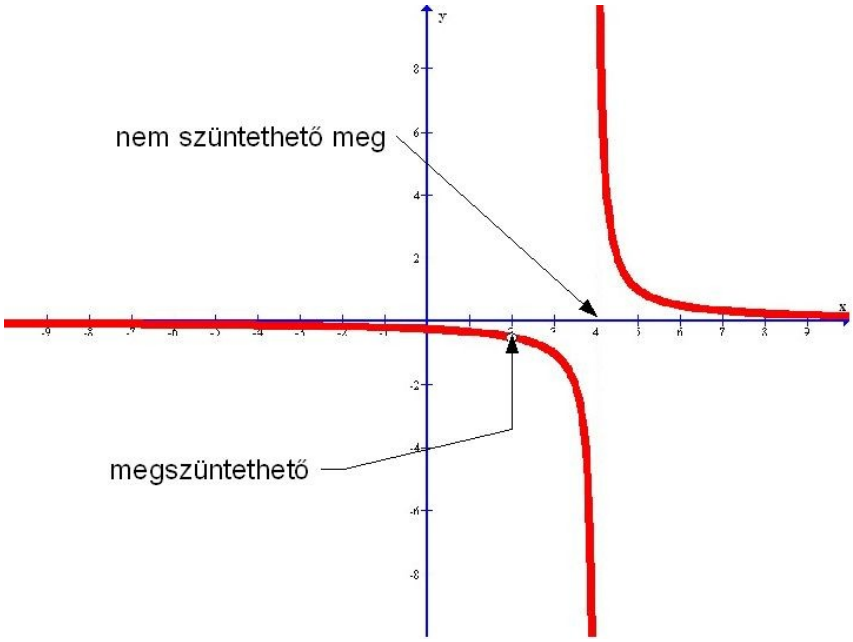
Racionális **tört**függvény: két polinomfüggvény hányadosa. Itt már sokkal bonyolultabb grafikonokkal találkozhatunk, ugyanis ezek a függvények már nem minden valós szám esetén értelmezhetők, szakadással rendelkeznek. Sok esetben azt fogják majd tőlünk kérni, hogy találjuk meg ezeket a szakadási helyeket, és ezen helyek környékén vizsgáljuk meg alaposabban a függvényünket.
Például:

$$f(x) = \frac{x-2}{x^2-6x+8}$$

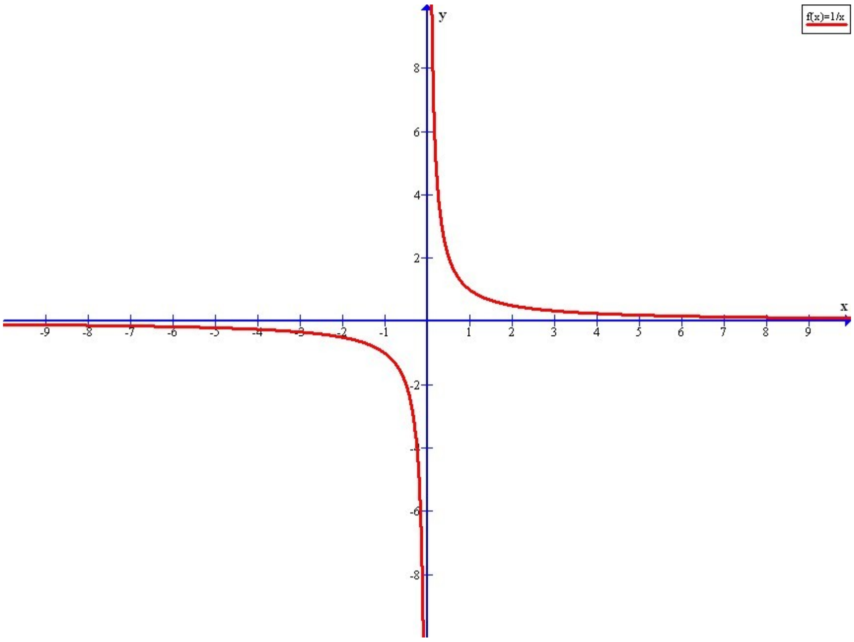
Mivel a nevező nem lehet nulla, ezért nem minden valós számot írhatunk az x helyébe, ugyanis, ha még emlékszünk rá, a nevező x=2-nél is és x=4-nél is lenullázódik. A függvény értelmezési tartománya tehát nem lehet a valós számok halmaza, ki kell venni a kettőt és a négyet, jelekkel:
$D_f=\mathbb{R}\setminus\{2,4\}$

A két szakadási hely azonban nem egyforma, ugyanis:
$f(x) = \frac{x-2}{x^2-6x+8} = \frac{x-2}{(x-2)(x-4)} = \frac{1}{x-4}$, vagyis az egyik „eltüntethető”. Valóban, ha ábrázoljuk a függvényünket, ezt kapjuk.

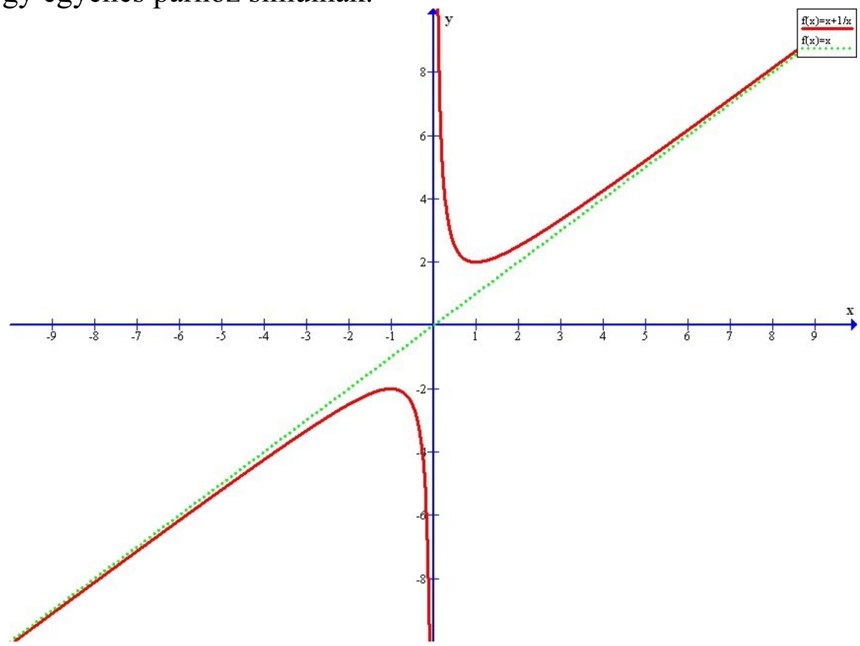




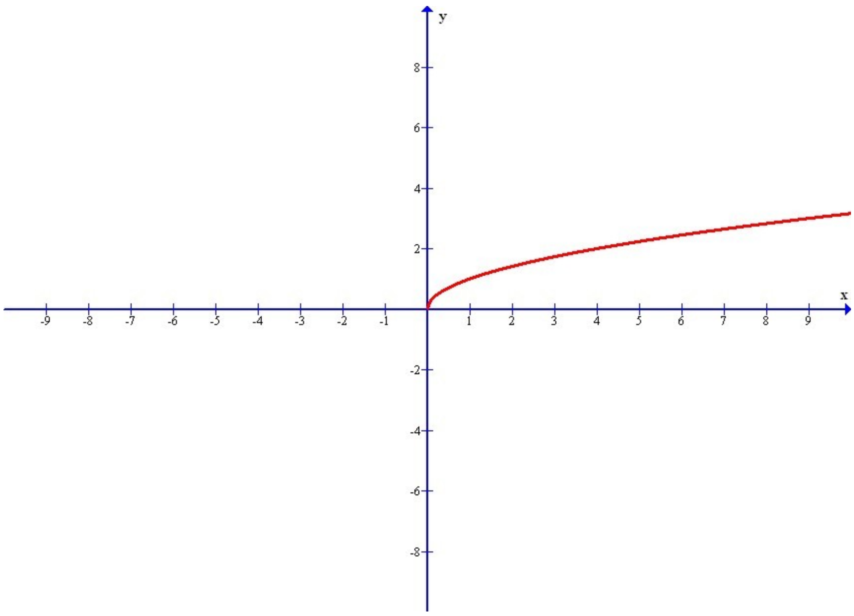
Ezeknek a függvényeknek a grafikonja sokszor lesz **hiperbola**, mint a fenti példában is. A legegyszerűbb hiperbolát eredményező függvény az f(x)= $\frac{1}{x}$.



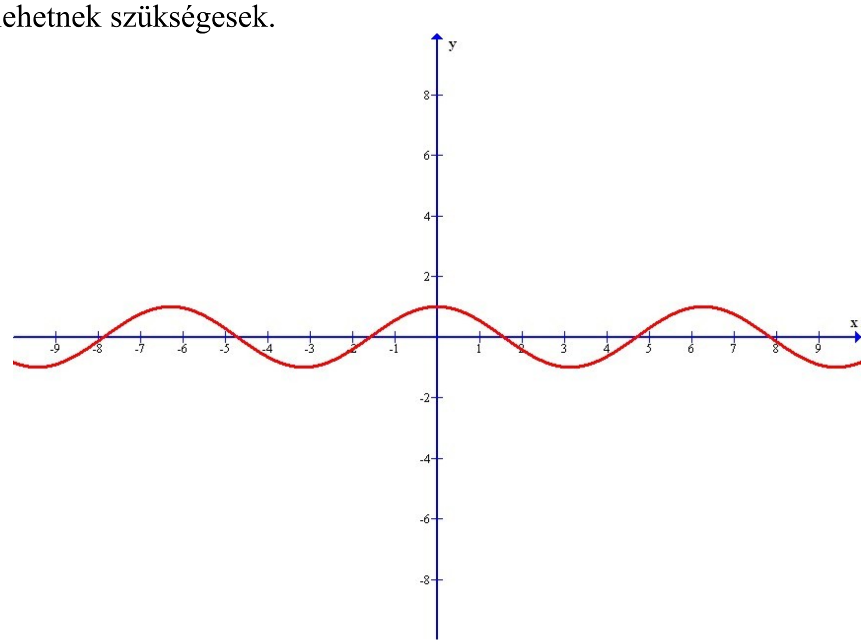
Mind az értékkészletében, mind az értelmezési tartományában van szakadás. A hiperbola ágai ugyanakkor egy egyenes párhoz simulnak.



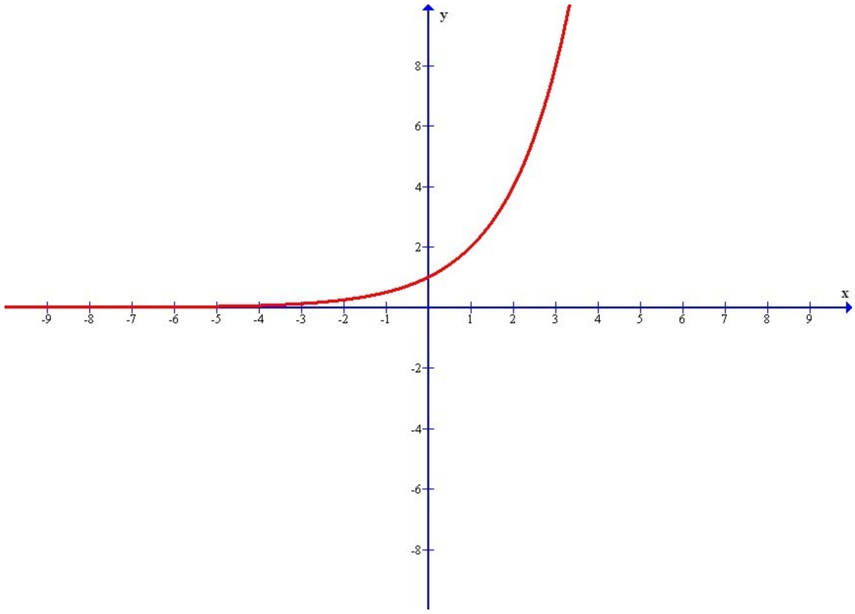
Gyökfüggvények**:** Itt is az értelmezési tartomány illetve az értékkészlet okozhatja a legtöbb gondolt.



Trigonometrikus függvények: középiskolás matematika tanulmányaink megrontói, mi nem sokat foglalkozunk velük, a legismertebb periodikus függvények, műszaki tudományok ismeretéhez lehetnek szükségesek.

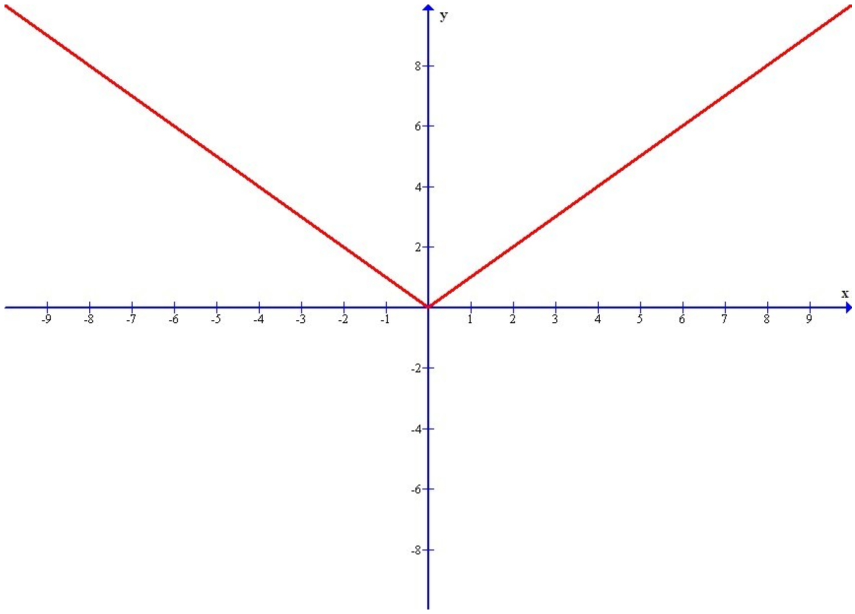


Exponenciális és **logaritmus**függvények:



Nem elemi függvények

Abszolútérték függvény: $|x| = \begin{cases} +x, \text{ha } x \geq 0 \\ -x, \text{ha } x < 0 \end{cases}$



Analízisből fogunk vele találkozni, legtöbbször az okozza a gondot, hogy meg kell tőle szabadulni, miközben egyenletet vagy egyenlőtlenséget oldunk meg. Például:

$|x^2 - 1| \geq 3$, ez két dolgot is jelent,

$x^2 - 1 \geq 3$ vagy $x^2 - 1 \leq -3$ és mindkettőt meg kell oldanunk. Az első egyenlőtlenségből azt kapjuk, hogy $x^2 \geq 4$, amiből az következik, hogy $|x| \geq 2$ (elhagytuk és visszajött!), míg a második egyenlőtlenség sosem teljesülhet, vagyis onnan nem kapunk megoldást. Íme a **veszély**: ha csak simán lehagyjuk az abszolútérték jelet, akkor is pontosan ugyanazt a megoldást kapjuk, de ELVI HIBÁT követünk el, és erre ugranak a matek tanárok…

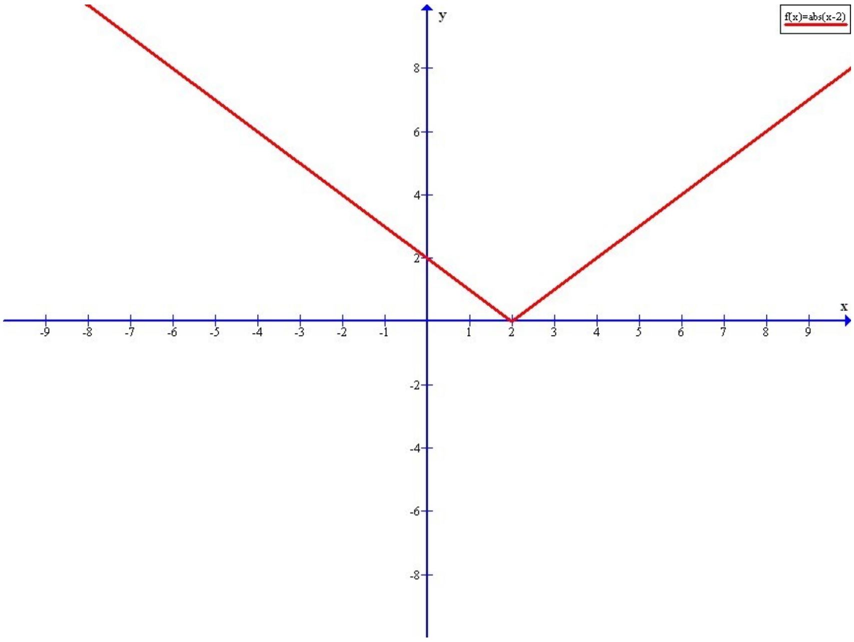
Műveletek

Természetesen függvényeket is lehet összeadni és szorozni, de ezzel mi most részletesebben nem foglalkozunk. Ami nehezebben érthető, és gondot okozhat deriválásnál, az a függvények egymásba ágyazása (kompozíció). Tanulmányaink során elegendő, ha mindössze két függvényt egymásba tudunk ágyazni, illetve ha ezeket felismerjük.
Az egymásba ágyazás azt jelent, hogy az egyik függvény által kiszámolt értékkel számol tovább a másik függvény. Nézzünk egy példát:
Az első függvény levon a számból kettőt, azaz f(x)=x-2

A második függvény veszi a szám abszolút értékét, azaz g(x)= $|x|$

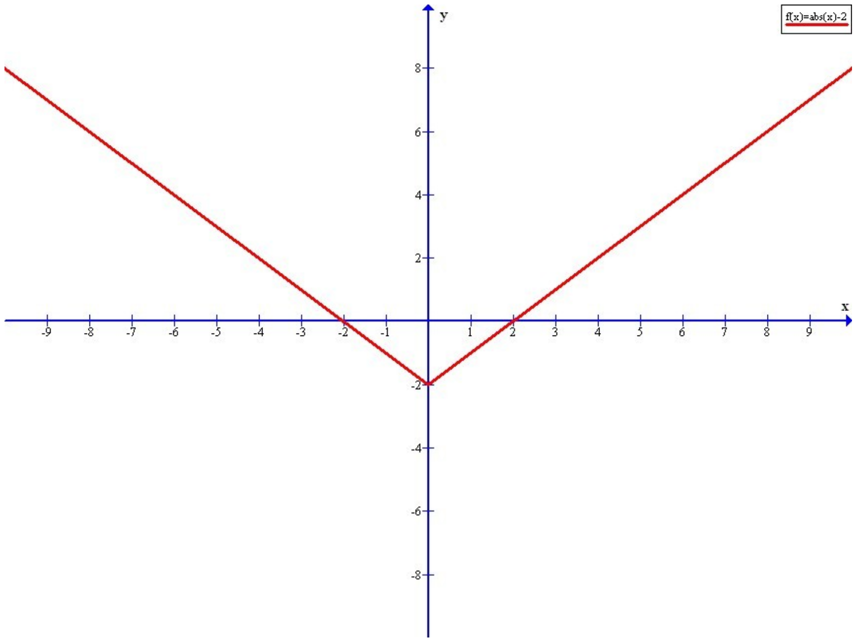
Ha most ezeket egymás után végezzük el egy számon,
akkor vagy azt kapjuk, hogy

először elveszünk kettőt, utána vesszük az abszolút értékét, azaz g(f(x))= $|x-2|$



vagy pedig

először vesszük az abszolút értékét, és után csökkentjük kettővel, azaz f(g(x))= $|x|-2$



Amit ebből nekünk tudnunk kell, hogy utólag szét tudjunk szedni egymásba ágyazott függvényeket, ez ugyanis majd deriválásnál fontos lesz!

Példa:
h(x)=sin(x^2)

f(x)=x^2
g(x)=sin(x)
ekkor
h(x)=g(f(x))

Példa:
h(x)= $\sqrt{\ln(x)}$

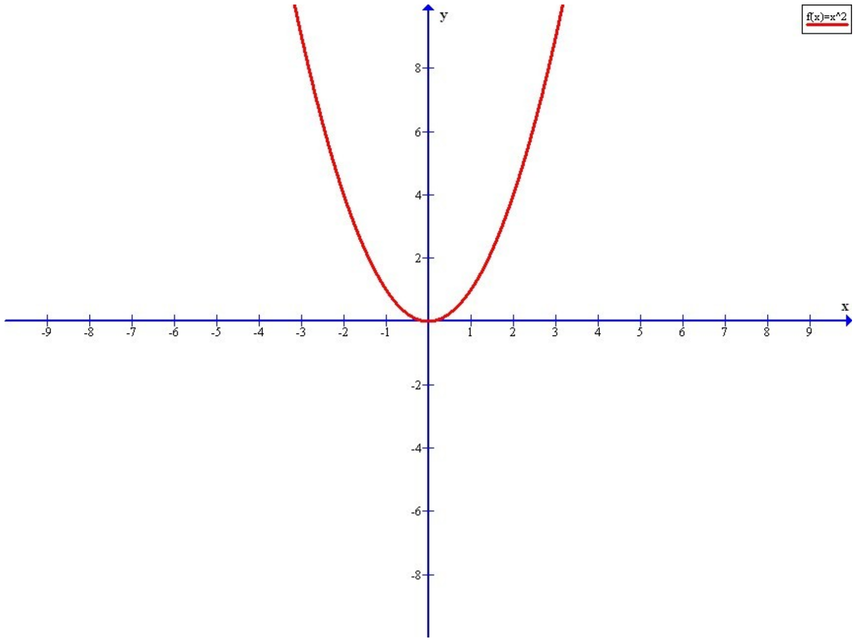
f(x)=ln(x)
g(x)= $\sqrt{x}$
ekkor
h(x)=g(f(x))

Példa:
h(x)=e^{3x}

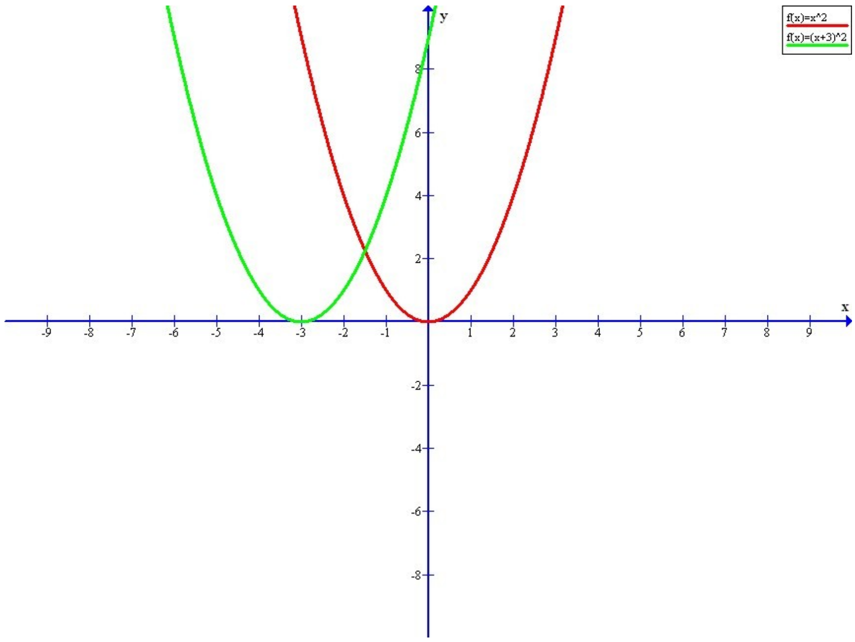
f(x)=3x
g(x)=e^x
ekkor
h(x)=g(f(x))

Függvénytranszformációk

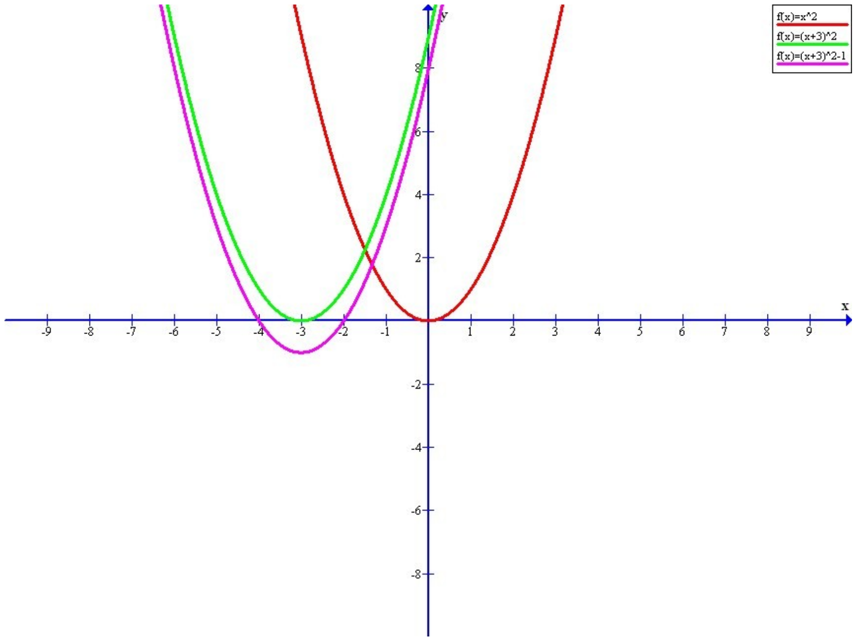
Sokkal könnyebb egy függvény grafikonját megalkotnunk vagy csak magunk elé képzelni, ha ismerjük a transzformációkban rejlő lehetőségeket.
Egy egyszerű példán keresztül be is mutatnánk, miről van szó.
A feladatunk, hogy ábrázoljuk az f(x)=$(x+3)^2$-1 függvény grafikonját.
Kezdjük el óvatosan, először csak rajzoljuk meg az x^2 paraboláját:



Most nézzük, mi változik, ha $(x+3)^2$-ről van szó. Ha korábban x=5-nél jött ki a 25-ös érték, akkor most már elég az x=2 is, hogy 25-öt kapjunk, azaz a grafikon eltolódik balra három egységnyit:



Ha ezek után minden értékből elveszünk egyet, akkor mindenki számára világos lehet, hogy az egész grafikon lejjebb csúszik egy egységnyit és kész a végeredmény!



Mindez természetesen más függvényekkel is működik és nem is kell minden egyes lépést lerajzolnunk, sok mindent fejben is el lehet képzelni…

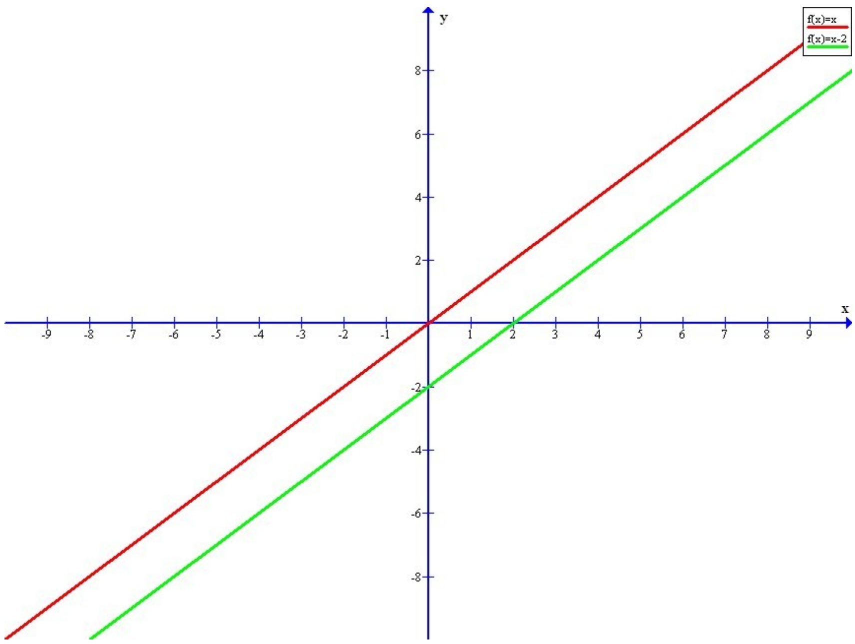
Még egy példa:

f(x)=$-\left|2|x-2|-1\right|+1$

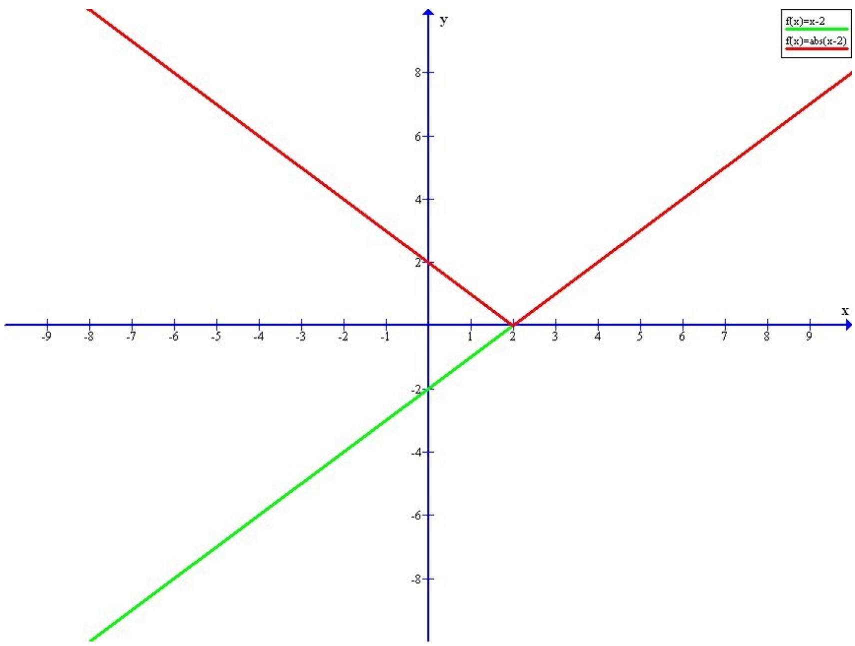
menjünk nagyon lassan és aprólékosan, mindig csak az utolsó lépést mutatva…

f(x)=x

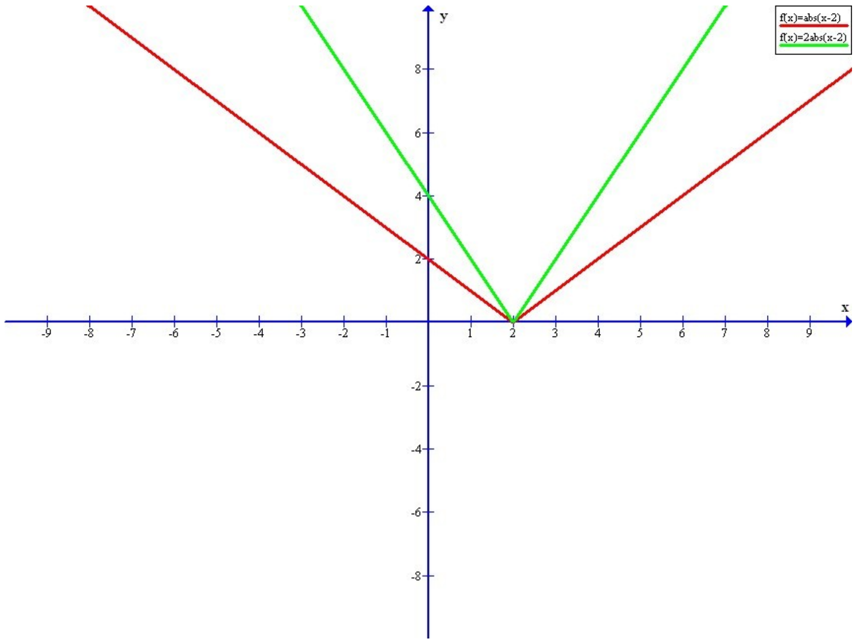
f(x)=x-2



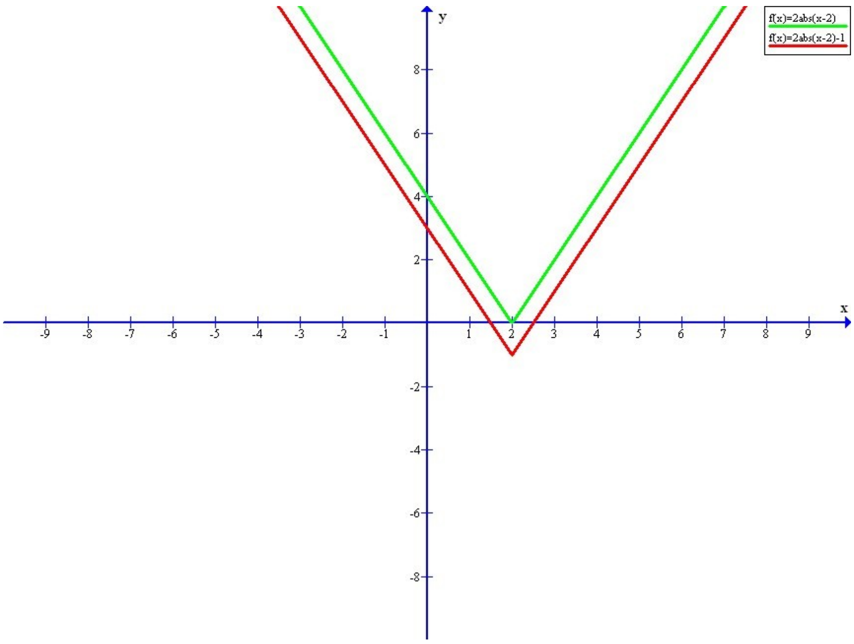
f(x)=$|x-2|$ (minden, ami az x tengely alatt volt, tükröződik az x tengelyre!)



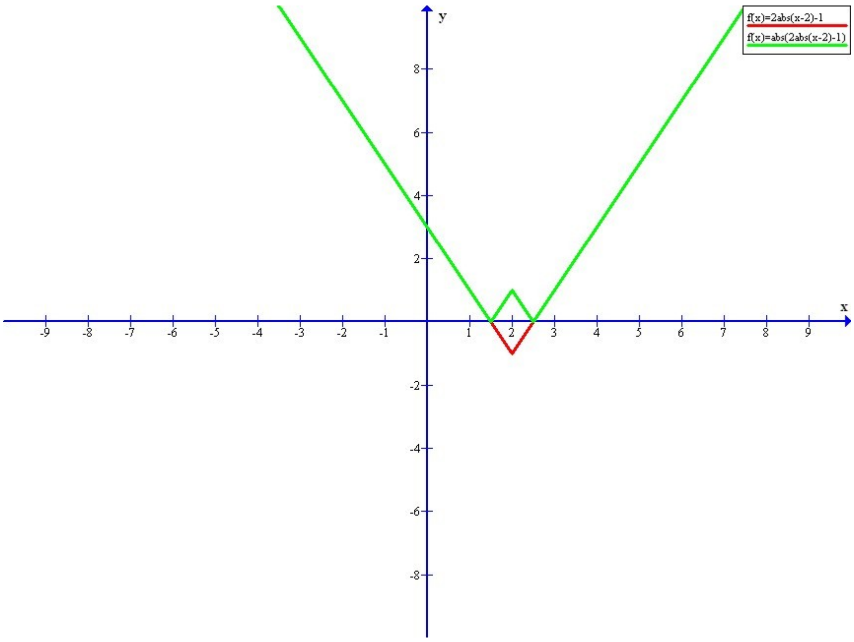
f(x)= $2|x-2|$ (minden kétszer olyan gyorsan emelkedik, meredekebb)



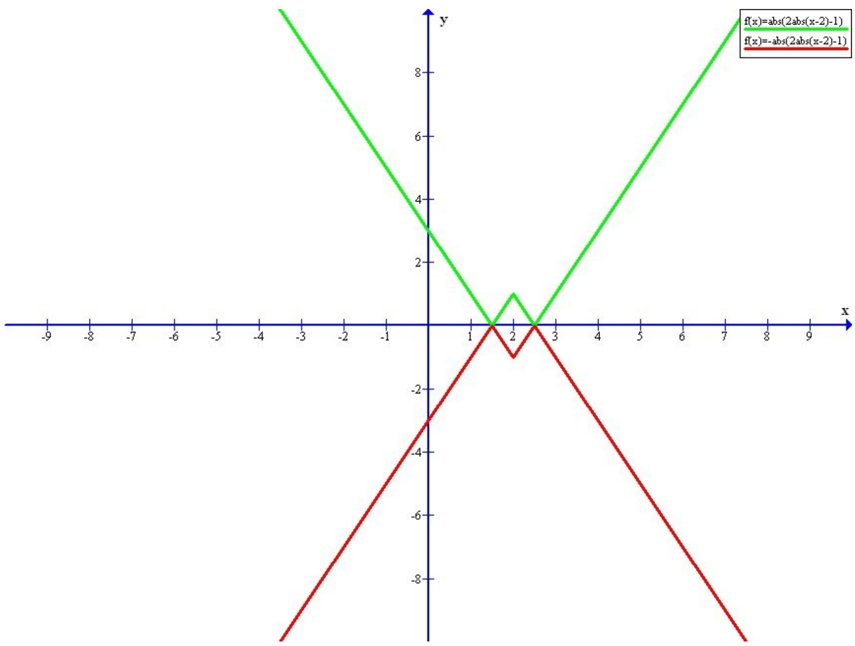
f(x)= $2|x-2|$ -1 (egyet lépünk lefelé)



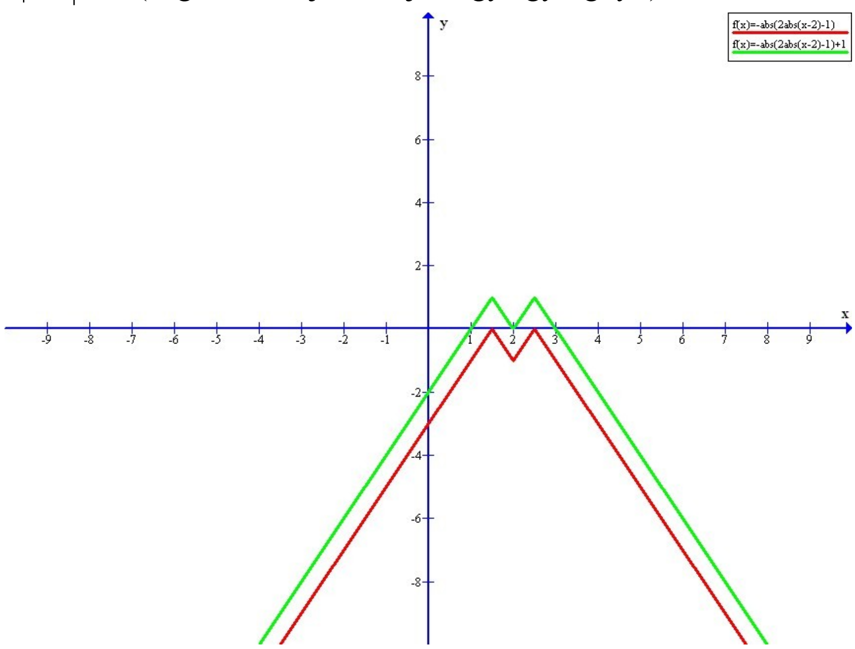
f(x)=$\left|2\left|x-2\right|-1\right|$ (az x tengely alatti részt feltükrözzük)



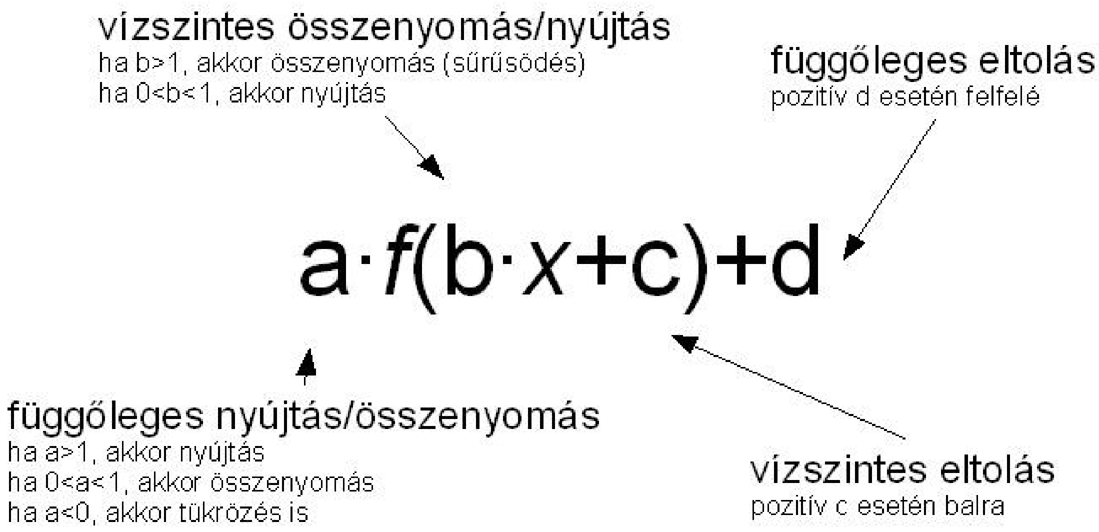
f(x)=$-\left|2\left|x-2\right|-1\right|$ (az egészet vízszintesen tükrözzük)



f(x)=$-\left|2\left|x-2\right|-1\right|+1$ (végezetül feljebb toljuk egy egységnyit)



Készen is vagyunk… Még egyszer ismételjük át:



Kapcsolat, megjegyzések

Ha jó szemléletes kép alakul ki bennünk a függvényekről, könnyen magunk elé tudunk képzelni egy grafikont, akkor az nagyon megkönnyíti az életünket például analízisből, de mint olvashattunk jól jönnek a függvények operációkutatásból is.