Egyenletek, egyenlőtlenségek

Fogalom

Na itt már olvashatunk fura dolgokat: Az **egyenlet** olyan nyitott mondat (**függvény**), amelyben két kifejezés egyenlőségét állítjuk, értelmezési tartománya egy előre megadott halmaz, értékkészlete pedig az {igaz, hamis} logikai értékeket tartalmazó halmaz.
Magyarul: van két kifejezés, az egyiket a bal oldalra, a másikat a jobb oldalra írjuk, középre jön egy egyenlőségjel. A kifejezésekben meg vannak **változók** vagy ismeretlenek (gyakran x vagy y), amik mindenféle értékeket felvehetnek, de csak nagy ritkán jön össze, hogy a baloldal értéke megegyezzen a jobboldaléval. A mi célunk, hogy pont ezeket a számokat megkeressük.
Lehet az egyenlet egy ismeretlenes, két ismeretlenes, …
Lehet az egyenlet elsőfokú, másodfokú, …
Lehetnek benne az egyszerű műveleteken kívül mindenféle borzalmas függvények…

És mindez természetesen egyenlőségjel helyett mehet „kacsacsőrrel" is, így lesznek az egyenlőtlenségek

Jelölés

Ha egy egyenlettel csinálunk valamit, azt általában mellette, tőle jobbra szoktuk jelölni.

Tulajdonságok, definíciók

Amivel foglalkozni fogunk:
- egyismeretlenes, elsőfokú
- egyismeretlenes, másodfokú
- kétismeretlenes, elsőfokú
- kétismeretlenes, másodfokú

egyenletek, egyenletrendszerek megoldása

Műveletek

Mit csinálhatunk egy egyenlettel, illetve egyenlőtlenséggel és mit tehetünk, ha többen vannak?

tevékenység	egyenlet	egyenlőtlenség
mindkét oldalhoz hozzáadhatjuk ugyanazt a számot	igen	igen
mindkét oldalból elvehetjük ugyanazt a számot	igen	igen
mindkét oldalt szorozhatjuk ugyanazzal a nullától különböző számmal	igen	igen, de ha negatívval szoroztunk: megfordul a kacsacsőr
mindkét oldalt eloszthatjuk ugyanazzal a nullától különböző számmal	igen	igen, de ha negatívval osztottunk: megfordul a kacsacsőr
ha többen is vannak, összeadhatjuk őket	igen	nem
mindkét oldalt emeljük négyzetre	igen, de hamis megoldások is kijöhetnek, a végén ellenőrizni kell	nem, hacsak nem győződtünk meg róla, hogy mindkét oldal pozitív

Egyismeretlenes, elsőfokú

általános alakja: ax+b=0

megoldás: az ismeretlen az egyik oldalon, a számok a másik oldalon: x= $-\frac{b}{a}$

grafikus megoldás: ábrázoljuk az f(x)=ax+b egyenest és olvassuk le, hol metszi az x tengelyt

Egyismeretlenes, másodfokú

általános alakja: $ax^2+bx+c=0$

megoldás: rendezzük át az egyenletet a fenti formára és használjuk a megoldóképletet:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

grafikus megoldás: ábrázoljuk az f(x)= ax^2+bx+c parabolát és olvassuk le a zérushelyeket

példa:

$$(2x-4)(x-2)=x^2-4x+5$$

$$2x^2-4x-4x+8=x^2-4x+5$$

$$x^2-4x+3=0$$

a=1, b=-4, c=3

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot1\cdot3}}{2\cdot1}=\frac{4\pm\sqrt{16-12}}{2}=\frac{4\pm2}{2}$$

$x_1=3$, $x_2=1$

megjegyzés: a képletben szereplő b^2-4ac dönti el a megoldások számát:

ha negatív: nincs valós megoldás

ha nulla: egy megoldás van (a két megoldás egyenlő)

ha pozitív: két különböző valós megoldás van

megjegyzés: néha annyira hiányos, vagy egyszerű a másodfokú egyenlet, hogy a megoldóképlet csak bonyolítja a dolgunkat, de ilyenkor is működik, csak figyeljünk a három paraméterre (a,b,c)

Kétismeretlenes, elsőfokú

általános alak: ax+by+c=0

dx+ez+f=0

vagyis ahány ismeretlen, annyi független egyenlet dukál

megoldás: **egyenlő együtthatók módszere**: mindkét egyenletet megszorozzuk egy-egy számmal úgy, hogy valamelyik ismeretlen együtthatója megegyezzen, ekkor a két egyenletet kivonva egymásból, már csak egy ismeretlen marad, azt kiszámoljuk, majd bármelyik eredeti egyenletbe visszaírva kapjuk a másik ismeretlent.

példa:

5x+3y=11	/*2
2x+4y=10	/*5
10x+6y=22	
10x+20y=50	/II-I
14y=28	/:2
y=2	/→I
5x+6=11	
5x=5	
x=1	

megoldás: az egyik egyenletet átrendezzük, hogy csak az egyik ismeretlen legyen valamelyik oldalon és ezt **behelyettesítjük** a másik egyenletbe: egy ismeretlenes lesz.

Példa:

$$\begin{array}{ll}
5x+3y=11 & \\
2x+4y=10 & \\
\hline
5x=11-3y & \\
x=\dfrac{11-3y}{5} & /\to II \\
\hline
2\dfrac{11-3y}{5}+4y=10 & /*5 \\
22-6y+20y=50 & \\
14y=28 & \\
\mathbf{y=2} & /\to I \\
\hline
5x+6=11 & \\
5x=5 & \\
\mathbf{x=1} &
\end{array}$$

grafikus megoldás: mindkét egyenest ábrázoljuk és leolvassuk a metszéspont koordinátáit.

Kétismeretlenes, másodfokú

Általános alak: $Ax^2+By^2+Cxy+Dx+Ey+F=0$

$Gx^2+Hy^2+Ixy+Jx+Ky+L=0$

vagyis itt is jár két egyenlet.

megoldás: ki kell küszöbölni az egyik ismeretlent, és így egy sima, egy ismeretlenes másodfokú egyenletre visszavezetni a megoldást, vagy olyan magasabb fokú egyenletre, ami másodfokúra visszavezethető

példa:

$x^2 + y^2 = 4$

$xy = 4$

a második egyenletből: $y = \dfrac{4}{x}$, ezt beírjuk az elsőbe: $x^2 + (\dfrac{4}{x})^2 = 4$

$x^2 + \dfrac{16}{x^2} = 4$

$x^4 + 16 = 4x^2$

$x^4 - 4x^2 + 16 = 0$

Vezessük be a $z=x^2$ jelölést, ekkor $z^2 - 4z + 16 = 0$, be a képletbe, $z_1=4$

$x^2=4$

$x_1=-2$, $x_2=+2$ és $y_1=-2$, $y_2=+2$

grafikus megoldás: ábrázoljuk az egyenletekhez tartozó alakzatokat, és keressük meg a metszésponto(ka)t. Az alakzatok lehetnek: egyenes, kör, parabola, hiperbola. ☹ lásd a koordináta-geometriával foglalkozó részt!

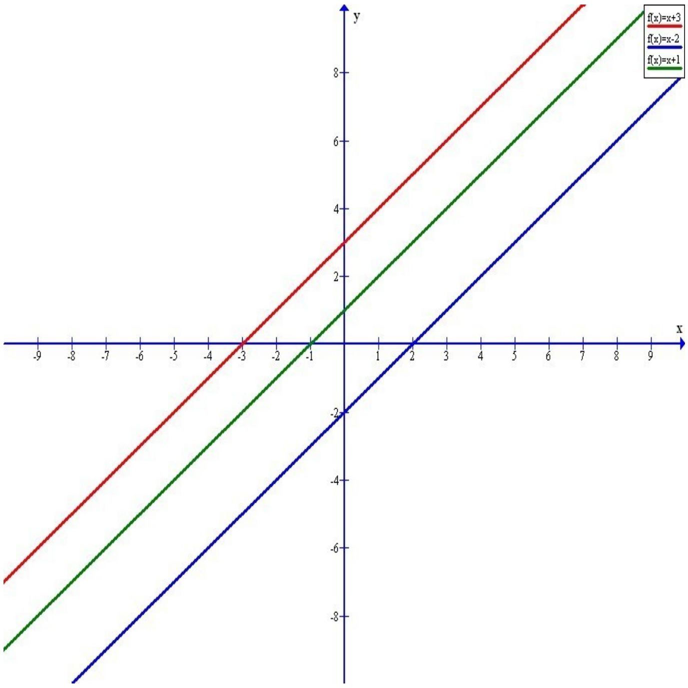
Természetesen sok más egyenlettel is találkozhatunk, logaritmussal, abszolút értékkel, szögfüggvényekkel, hatványokkal, a megoldás ezekben az esetekben nem mindig egyszerű és nem adható általános módszer, ötlet és gyakorlás kérdése az egész.

Egyenlőtlenségek: itt jól járunk, ha nem csak számolni tudunk jól, hanem tudjuk használni a függvények grafikonjáról tanultakat, mert sok számolástól és tévúttól kímélhetjük meg magunkat.

példa:

$$\frac{(x+3)(x-2)}{(x+1)} \leq 0$$

Nem kell kétségbe esni, mindhárom zárójelben egy-egy egyenes képlete látható, ábrázoljuk őket!



1. ábra:

Látjuk, hogy az x tengely több szakaszra bomlik, menjünk rajta végig, balról jobbra haladva!

x<-3: mindhárom egyenes az x tengely alatt, vagyis mind a három zárójelben egy-egy negatív szám van, az eredmény is negatív, ez jó

x=-3: a számláló nulla, a nevező nem, ez is jó

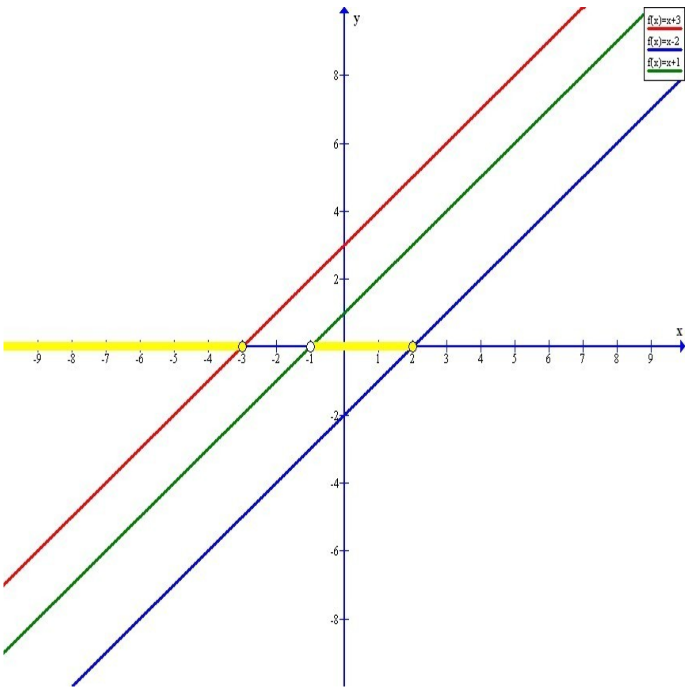
-3<x<-1: az egyik egyenes az x tengely fölött, kettő alatta, egy pozitív két negatív, ez nem jó

x=-1: a nevező negatív, nem jó

-1<x<2: két egyenes az x tengely felett egy alatta, két pozitív egy negatív, ez jó

x=2: a számláló nulla, a nevező nem, ez is jó

x>2: mindhárom egyenes az x tengely felett, három pozitív szám szorzata is pozitív, nem jó



2. ábra:

A megoldás tehát x≤-3 vagy -1<x≤2